Jean-Pierre Luminet
Marc Lachièze-Rey

FINITO O INFINITO?

Limiti ed enigmi dell'Universo

Infinito: parola di spavento, ha detto Blaise Pascal e ha ripetuto Borges, ma già Aristotele riconosceva che il nostro pensiero è infinito come il movimento e il tempo. Così, maledizione o benedizione che sia, l'infinito si è rivelato una delle nozioni più stimolanti del pensiero umano: matematica, logica, fisica ma anche religione e arte. Per un poeta che si compiace di naufragare in quell'immenso mare, centinaia di rigorosi scienziati si sono battuti per eliminare l'infinito dal contesto della conoscenza pubblica e controllabile. Ma, come mostra l'attuale dibattito circa il nostro Universo, la questione "finito o infinito" non è stata ancora risolta e le varie risposte possono condurre a esiti davvero imprevedibili.

Jean-Pierre Luminet, astrofisico di fama internazionale, è direttore di ricerca al CNRS. Ha già pubblicato *La segreta geometria del cosmo* (2004).

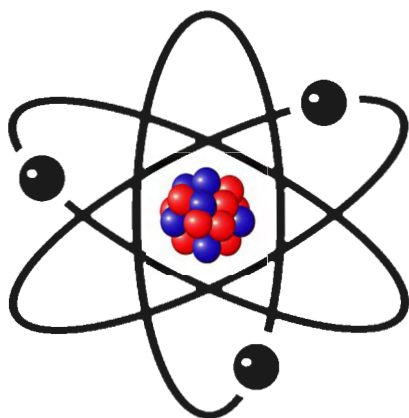
Marc Lachièze-Rey è direttore di ricerca al CNRS. In italiano ha pubblicato *Oltre lo spazio e il tempo. La nuova fisica* (2004).

In copertina:
foto © Agenzia Getty Images/Laura Ronchi

Realizzato

da

Democrito di Abdera

colui che il mondo a caso pone

Jean-Pierre Luminet
Marc Lachièze-Rey

Finito o infinito?

Limiti ed enigmi dell'Universo

Edizione italiana a cura di
Stefano Moriggi

INDICE

JEAN-PIERRE LUMINET, MARC LACHIÈZE-REY

FINITO O INFINITO?

Ringraziamenti

Jean-Pierre Luminet esprime la propria profonda gratitudine alla Fondation des Treilles, per la sua accoglienza che gli ha permesso di portare a buon fine *questo lavoro*, assicurandogli un soggiorno sereno, qualcosa che gli sarebbe stato impossibile trovare altrove.

Nota del curatore

Nella bibliografia riportata in fondo al volume sono state aggiunte opere di riferimento particolarmente indicate per il lettore italiano che voglia approfondire alcuni dei temi trattati in *questo volume*. Le note del curatore sono espressamente segnalate e mirano a rendere più accessibile questo tipo di informazione. Le traduzioni delle citazioni poetiche, tranne che per Lucrezio e Valéry, sono di Marina Corona. Per la resa in italiano del testo e per il completamento di alcune delle note, un ringraziamento particolare va anzitutto a Jean-Pierre Luminet e Marc Lachièze-Rey per la loro paziente collaborazione, e ancora a Claudio Bartocci, Silvio Bozzi, Stefano Gattei, Elena Gritti, Elio Sindoni e Corrado Sinigaglia.

PROLOGO

Chi è? Oh, benissimo: fate entrare l'infinito.
LOUIS ARAGON

Ciò che è direttamente conoscibile è finito. Eppure, appena ci mettiamo a pensare fa la sua comparsa l'idea dell'infinito. Stando a Emmanuel Lévinas una parola come *infinito* designerebbe la proprietà di cui godono certi contenuti di pensiero di estendersi oltre ogni limite ("il concetto di questa trascendenza rigorosamente sviluppato si esprime con il termine di infinito").[1] Ma possiamo incontrare l'infinito nella Natura? E, dunque, nella scienza fisica che tale Natura vuole descrivere? È forse presente nel Mondo, nelle cose? Costituisce una dimensione effettiva e multipla della realtà? Oppure abita solo nella nostra mente, finzione necessaria del nostro pensiero, a cui, però, nessuna realtà fisica è in grado di corrispondere? Il dilemma è già completamente esplicitato da Aristotele.

Ogni grandezza (movimento, spazio, tempo...) è sottomessa all'alternativa di essere limitata o illimitata. Tuttavia, la *Fisica* di Aristotele afferma che tutte le entità che si danno effettivamente e tutti i processi che si possono effettivamente eseguire sono finiti. Certo, Aristotele non vieta di concepire "per comodità" delle nozioni che coinvolgano l'infinito; ma non

1. E. Lévinas, *Totalità e infinito*, citato in bibliografia, p. 23.

concede loro alcuna esistenza reale: l'infinito può essere solo *potenziale*, non *attuale*.

Chi cammina, con la sequenza dei propri passi – un passo, poi un altro, un altro ancora, ecc. – capisce subito che il suo procedere può andare avanti indefinitamente. In linea teorica, può sempre fare un passo in più. Questa iterazione senza limite conduce alla prima intuizione di un *indefinito* senza fine: è l'infinito potenziale; in breve, la possibilità di andare sempre un po' più in là. In modo ovvio, l'infinito potenziale è legato alla nozione di successore di un intero naturale: 1, 2, 3, ecc. A un numero segue sempre immediatamente un altro numero; non esiste un numero ultimo, perché quest'ultimo numero avrebbe anche lui un successore! Si chiama *principio di ricorrenza*, procedura di base che genera l'infinito potenziale.

Ma allora, dire 2 prefigura già l'infinito potenziale. Infatti, $2 = 1 + 1$, e nulla ci impedisce di scrivere poi $2 + 1 = 3$, $3 + 1 = 4$, *ad infinitum*. Uno è l'unità; due è la pluralità, la molteplicità. Se 2 implica già l'infinito, questo vuol dire che il molteplice, il diverso sono essi stessi potenzialmente infiniti?

Come si vede, il problema dell'infinito riguarda sia la filosofia (la teologia, l'arte, l'etica, ecc.) sia le scienze della natura. Ed è poi necessario distinguere tra la scienza dell'Universo, la scienza della materia e la scienza del numero (quella che chiamiamo matematica).

In Aristotele il termine *infinito* viene associato a una qualche idea di imperfezione. Seguendo le sue orme, scienziati – e più ancora filosofi e teologi – hanno sviluppato nel corso dei secoli una resistenza accanita al concetto di infinito attuale, spesso al di là dello stesso atteggiamento razionale. Quanto a loro, i primi Padri della Chiesa – non diversamente dai Neoplatonici – e poi i rappresentanti della Scolastica lo hanno inizialmente considerato un attributo di Dio; l'infinito attuale passerà poi dalla teologia alla matematica e alla filosofia della natura, trovando espressione nella geometria della prospettiva (secolo XV), nella concezione dell'infinitamente grande della cosmologia (XVI e XVII secolo) e nello studio degli infinitesimi (XVII e XVIII secolo). Gli infiniti diventeranno così concepi-

bili ancor prima di essere adeguatamente fondati e classificati. Quest'ultima tappa, compito di matematica e di logica, si è prodotta nei secoli XIX e XX.

Mentre il fisico cerca in genere di eliminare l'infinito dalle sue teorie, l'intera matematica sembra costruita sul concetto di infinito. Si tratta di un concetto che concerne la nozione di *numero* e quella di *insieme*. Esiste un numero che possiamo associare alla nozione di infinito? Esistono degli insiemi che contengono un numero infinito di elementi? Ci limitiamo qui a formulare domande del genere in un modo piuttosto ingenuo, in quanto non c'è veramente nessuno che sia capace di spiegare cosa voglia dire *esistere* in matematica. Forse i numeri esistono al di fuori di noi, a un altro livello di realtà? Resta però il fatto che gli infiniti costituiscono una fonte di paradossi che, per più di due millenni, hanno ostacolato la formazione di una teoria che ne consenta la manipolazione. Tra questi paradossi, i più sconcertanti sono stati quello degli indivisibili (a proposito degli infinitamente piccoli) e quello della riflessività (a proposito degli infinitamente grandi). Per di più, questi due infiniti paiono indissolubilmente legati: nella più piccola parte di una lunghezza, per esempio, sembra che si possa trovare un numero infinitamente grande di punti, ciascuno di dimensione infinitamente piccola.

L'onnipresenza dell'infinito in matematica è sorprendente, poiché l'uomo è un essere finito, limitato, collocato su un pianeta limitato e finito. Eppure, questo essere finito esamina l'infinito e se ne serve, al punto che l'infinito gli risulta indispensabile per comprendere il finito stesso. Un esempio immediato di tutto ciò l'abbiamo quando calcoliamo il numero π che esprime il rapporto tra la circonferenza di un cerchio e il suo diametro. Si tratta di una grandezza finita, ma la sua espressione è un numero che richiede un'infinità di decimali. Per calcolare questo numero (Archimede ci aveva già provato) bisogna ricorrere a una procedura infinita.

È il matematico Bernard Bolzano che, all'inizio del XIX secolo, ha proposto per la prima volta per l'infinito uno statuto che non sfigurava a confronto di quello tradizionalmente attribuito al finito. Alla fine di quel secolo, i lavori di Georg

Cantor, che oggi vengono pressoché unanimemente considerati il punto di partenza della cosiddetta "matematica moderna", furono rifiutati con moti di orrore da non pochi uomini di scienza; Cantor si trovò praticamente solo a difenderli, fino a smarrire la ragione.

In compenso, si è dovuto attendere l'inizio del Novecento per una riabilitazione – parziale – dell'infinito entro la fisica. La teoria dei quanti, la cosmologia relativistica e i modelli dei buchi neri, per esempio, hanno evocato dei nuovi infiniti. Da allora, finito e infinito si sfiorano e si intrecciano entro i medesimi modelli.

Questo volume ricostruisce alcune tappe delle "storie parallele" dell'infinito nella cosmologia, nella matematica e nella fisica di base. Un numero enorme di autori, delle più svariate discipline, ha detto la sua a proposito di un soggetto che è, per definizione, inesauribile. Ci limiteremo *qui* a citare le ricerche che ci sembrano più rappresentative di una corrente di pensiero o di un'epoca. Da Aristotele a Einstein, la biografia dell'infinito mette in scena Lucrezio, Giordano Bruno, Newton, Bolzano, Cantor e moltissimi altri visionari dell'infinito. Si tratta sostanzialmente di comprendere perché, in ogni momento della sua storia, lo statuto fisico dell'infinito è legato inestricabilmente al suo statuto metafisico.

Oltre alla storia – che resta comunque indispensabile, perché è impossibile comprendere l'oggetto di una disciplina scientifica se non se ne conosce la storia – vogliamo ripensare "l'attualità degli infiniti", l'infinitamente grande e l'infinitamente piccolo, alla luce delle teorie odierne. La nostra tesi è che la cosmologia relativistica costituisca il solo dominio della fisica ove l'infinito "attuale" (infinità dello spazio, eternità del tempo) non sia stato eliminato, e questo rifletterebbe la sua particolare collocazione epistemologica tra le altre discipline scientifiche. Quanto agli sviluppi più recenti della fisica (topologia dello spazio-tempo, rinormalizzazione, vuoto quantistico, teoria delle superstringhe, cosmologia quantistica), essi fanno senza posa rinascere l'infinito dalle sue ceneri, come una Fenice o una enigmatica Sfinge dalle molte facce...

1

L'INFINITO DEL CIELO

> L'infinito del cielo, con le sue sfide, la sua rotazione, le sue parole innumerevoli, non è che una frase un po' più lunga, un po' più affannata delle altre.
>
> RENÉ CHAR

1.1 Passioni e controversie

"Insieme erano tutte le cose", all'inizio. Poi "l'aria e l'etere si separano dal molto che li avvolge, e tale avvolgente è illimite per quantità". Inoltre, "stando questo così, bisogna supporre che in tutti gli aggregati ci siano molte [cose] e di ogni genere e semi di tutte le cose aventi forme di ogni sorta e colori e sapori. E che uomini siano stati composti e le altre creature quanto hanno vita, e che questi uomini abbiano città abitate e opere costruite, come da noi, e che la terra produca per loro molte [cose] e di ogni genere, che essi usano portandosi le migliori a casa".[1] Per questa dottrina della mescolanza originaria e della separazione (che include un accenno anche alla pluralità dei mondi abitati, circa due millenni e mezzo fa) Anassagora di Clazomene (500-428 a.C.), che non esitava a "ridurre il divino a cause irrazionali, a forze imprevidenti, a fenomeni inevitabili",[2] fu il primo "sapiente" della storia a essere accu-

1. Anassagora, DK59, B1, B2 e B4. Tr. it. di R. Laurenti in *I Presocratici*, citato in bibliografia, pp. 602, 603-604. [NdC]
2. DK59, A18. Tr. it. in *I Presocratici*, cit., p. 563. [NdC]

sato di empietà e di eresia. Ebbe più fortuna di molti suoi successori: difeso da amici potenti, venne prosciolto e poté andarsene via, evitando l'ostilità di Atene.

L'aneddoto esemplifica come, prestissimo, la nozione di infinito abbia suscitato passioni e controversie. Come per la maggior parte delle grandi idee filosofiche, la sua origine sembra risalire appunto al pensiero greco. Le prime scuole di sapienti e di filosofi, che si dispiegano nell'arco di due secoli, vengono usualmente raggruppate sotto il nome di "Presocratiche"; assai differenti l'una dall'altra, ciascuna di esse si arrischia a suo modo a dare una spiegazione razionale del mondo, il più possibile emancipata dal mito. Quali sono le origini della materia? Le sue trasformazioni e i suoi elementi ultimi? Qual è la forma del nostro Universo e quali le leggi che lo governano? Ritroviamo già qui le preoccupazioni più attuali della fisica delle particelle e della cosmologia.

1.2 L'*apeiron*

Il prototipo della visione presocratica del Mondo ci viene da Anassimandro di Mileto, del VI secolo a.C., che propone l'*apeiron* come elemento primo di tutte le cose. Il termine, la cui esatta portata continua ancora oggi a essere oggetto di discussione, è caratterizzato da diversi significati: la parola indica a un tempo infinito (illimitato ed eterno), indefinito (indeterminato) e inconcepibilmente grande. La parola corrisponde in un certo modo a quel che noi oggi consideriamo come lo spazio.

Anassimandro ritiene poi che il dominio accessibile alle nostre ricerche, il "Mondo" ove si svolgono i fenomeni, sia finito. Questa idea di un Mondo chiuso immerso in un mezzo infinito che lo ingloba è destinata a durare nei secoli. Peraltro, ce n'è traccia già in Talete, anch'egli originario di Mileto: il mezzo universale è costituito di acqua, il Mondo è una bolla d'aria semisferica fluttuante in questa massa liquida infinita.

Dottrina concorrente, l'atomismo propone una versione completamente diversa dell'infinito cosmico. Fondata nel V

secolo a.C. da Leucippo e quindi rinnovata da Democrito, questa corrente annoverava tra i più illustri difensori il greco Epicuro (341-270 a.C.) e il romano Lucrezio (I secolo a.C.). La credenza di base è l'esistenza degli atomi, particelle indivisibili e insecabili di materia (*atomos*, ovvero quel che non può essere diviso), elementi primi dell'Universo. Altro elemento fondamentale, il vuoto (*kenon*) costituisce una sorta di teatro senza confini, nel quale hanno luogo i movimenti degli atomi. Su questo "spazio" infinito la materia non influisce: è assoluto, dato *a priori*. Indistruttibili e inalterabili, gli atomi si trovano nel suo seno per l'eternità, in numero infinito, si distinguono solo per la loro taglia e la loro forma, e si raggruppano qua e là per costituire corpi cosmici. Ne deriva, in modo ovvio, il concetto della pluralità dei mondi. Nella sua lettera a Erodoto, scrive Epicuro: "I mondi sono infiniti, quali simili a questo nostro e quali dissimili. Gli atomi infatti [...] percorrono anche le più grandi lontananze; e quegli atomi che sono capaci di formare un mondo non si esauriscono nella formazione di uno solo né di un numero di mondi illimitato, si tratti di mondi simili o dissimili dal nostro. Così, niente si oppone a che vi siano infiniti mondi".[3] L'atomismo predice così l'esistenza di mondi innumerevoli, che corrispondono a tutte le combinazioni possibili degli atomi. Questi atomi, che creano gli oggetti e i mondi, sono gli agenti della causalità. Poiché sono in numero infinito, è lo stesso per le loro possibili combinazioni, per i mondi e per la diversità di questi.

Se l'ipotesi degli atomi è grandiosa e feconda, la cosmologia degli atomisti resta carente. Si è detto che Democrito stesso non conoscesse il numero dei pianeti visibili nel cielo! Del resto, l'atomismo sarà duramente criticato da Socrate, da Platone e da Aristotele. Per di più, poiché sosteneva che l'Universo non è governato dagli dei, ma dalla materia elementare e dal vuoto, l'atomismo era destinato a entrare inevitabilmente in conflitto con le autorità religiose, non diversamente che nel

3. Epicuro, "Epistola I, a Erodoto", in *Opere*, citato in bibliografia, p. 152. [NdC]

caso di Anassagora. Ma grazie a Epicuro prima e a Lucrezio poi, l'atomismo resterà fiorente fino all'avvento del Cristianesimo. Giudicato poi troppo materialista, finirà occultato nei primi secoli dell'Era cristiana e tornerà a far parte della corrente principale della scienza solo nel XVII secolo.

L'infinito secondo Lucrezio

Poeta latino del I secolo a.C. Lucrezio ha divulgato in modo stupendo la filosofia atomista nel suo poema cosmologico *De rerum natura*. Il Libro II tratta in particolare dello spazio infinito e di una delle sue conseguenze inevitabili: la pluralità dei mondi (vv. 1023-1025, 1040-1076).

E adesso rivolgi la mente alla nostra vera dottrina.
Una cosa molto nuova infatti sta per giungerti all'orecchio,
un aspetto nuovo della natura si appresta a manifestarsi.
[...]
Perciò smetti di respingere dalla mente la dottrina,
atterrito dalla novità di per se stessa, ma valuta
semmai con acuto giudizio e, se ti sembrano cose vere,
arrenditi, se sono false, preparati a combattere.
L'animo infatti cerca di spiegare – poiché l'insieme
dello spazio è infinito fuori dalle mura di questo mondo –
che cosa vi sia oltre, fin dove la mente voglia esplorare,
fin dove voli il libero slancio dell'animo.
Anzitutto per noi dovunque, da tutte le parti,
da ogni lato, sopra e sotto, nel tutto non c'è limite;
come ho dimostrato e proclama di per sé
la stessa realtà, ed è chiara la natura dell'abisso.
Non si deve perciò credere in alcun modo verosimile
– mentre in ogni direzione si estende vuoto lo spazio infinito
e semi di numero infinito e somma sconfinata
volteggiano in molti modi sospinti da eterno moto –
che siano stati creati soltanto questa terra e questo cielo
e tutti quei corpi di materia al di fuori non concludano nulla;
tanto più che questo mondo è stato fatto dalla natura

e i semi stessi delle cose, da sé, scontrandosi per caso,
in molti modi ammassati alla cieca, invano, senza effetto,
alla fine si combinano – almeno quelli che, congiunti all'improvviso,
sarebbero diventati per sempre l'origine di grandi cose:
la terra, il mare, il cielo e la stirpe dei viventi.
Perciò devi ammettere, ancora una volta,
che esistono altrove altri agglomerati di materia,
come questo, che l'etere stringe in un avido abbraccio.
Inoltre, quando c'è molta materia disponibile,
quando c'è spazio pronto e non c'è cosa né motivo
che si oppone, di sicuro si devono compiere e formare le cose.
Ora, se la quantità dei semi è tale che per contarla
non basterebbe l'intera vita delle creature viventi,
e se permane la stessa forza e natura capace di congiungere
tutti i semi delle cose al loro posto in modo analogo
a come sono stati congiunti qui, devi ammettere
che da altre parti esistono altri mondi
e diverse razze di uomini e specie di animali.[4]

1.3 Il Mondo chiuso

Parmenide, vissuto nel V secolo a.C., è forse il primo rappresentante del finitismo cosmologico. A suo parere, il Mondo, immagine dell'Essere Perfetto, è simile a una "sfera perfettamente rotonda"; è dunque necessariamente limitato:

Ma poiché vi è un limite estremo, [l'Essere] è compiuto
da ogni lato, simile alla massa di ben rotonda sfera
di ugual forza dal centro in tutte le direzioni;
che egli infatti non sia né un po' più grande né un po' più debole qui o là è necessario.[5]

4. Utilizziamo qui la versione di Renata Raccanelli in Lucrezio, *De rerum natura*, citato in bibliografia, pp. 119-121. [NdC]
5. Parmenide, DK28, B8, vv. 45-49. Tr. it. di P. Albertelli in *I Presocratici*, cit., p. 276.

In modo più argomentato, Platone (428-347 a.C.) prospetta un Universo finito, chiuso da una sfera ultima che contiene le stelle. Per parlare di "spazio" (questa nostra parola viene dal latino *spatium*) la terminologia greca ricorreva a parole differenti: *apeiron*, *khaos*, *kosmos*, *kenon*, *pan* ("tutto"), *ouranos* ("cielo"), ecc. Nel *Timeo* Platone introduce il termine specifico *khora* per designare l'estensione, o spazio, inteso come ricettacolo della materia, e da questa definito. Il fondatore della celebre Accademia svolgerà un ruolo essenziale nell'evoluzione del pensiero astronomico, in quanto aveva insistito sul fatto che i "sapienti" non devono accontentarsi della contemplazione degli astri, ma sarebbero tenuti a utilizzare la geometria per scoprire la vera natura dei corpi celesti e spiegarne i movimenti. Tutta l'astronomia greca, da Eudosso e Aristotele fino a Tolomeo, che segna il coronamento di tutti questi concetti cinque secoli dopo, si svilupperà a partire dal precetto platonico.

Bisogna però dire che, da parte sua, Aristotele (384-322 a.C.) non sviluppa a rigore una teoria dello spazio, piuttosto una teoria del luogo (*topos*), distinto dall'estensione e indipendente dalla materia. Il luogo è il limite che avvolge, che racchiude le cose. L'Universo non è *un* luogo, ma *il* luogo, somma complessiva di tutti i luoghi occupati dai corpi. Opponendosi pure agli atomisti, Aristotele ritiene che il numero dei corpi sia necessariamente finito. Ma a livello cosmologico la sua concezione si avvicina abbastanza a quella di Platone: una Terra fissa al centro di un Mondo finito, circoscritto dalla sfera che contiene tutti i corpi dell'Universo. Ma questa sfera esterna non ha luogo, poiché al di là non c'è nulla, né vuoto né estensione.

1.4 Atto e potenza

La scienza della natura (la fisica) e l'analisi del movimento conducono inevitabilmente Aristotele a porre per la prima volta il problema dell'infinito nei termini che saranno cari alla modernità. L'infinito esiste davvero? Movimento, lunghezza e intervallo temporale sono tutti concetti soggetti a questa alter-

nativa: essere limitati o sfuggire al limite. Per Aristotele la divisibilità del movimento e quella di una grandezza fisica sono senza fine (e in questo egli si oppone alle scuole di pensiero atomistiche). Bisogna dunque rendere conto di questa proprietà che caratterizza la divisibilità di una linea, di una superficie o di un volume.

Nella *Fisica*, dicendo "infinito [*apeiron*] ciò che non si può percorrere, perché è per sua natura impenetrabile [...] o ciò che presenta un percorso senza fine" (204 a, 3-6), Aristotele inscrive la sua definizione dell'infinito nella categoria del quantificabile.[6] Chi dice quantità dice grandezza o numero, e per poter misurare o contare bisogna essere in grado di distinguere il tutto dalle sue parti. Si tratta, dunque, di porre d'un colpo che il tutto sia divisibile, ripartibile. Così, per una qualsiasi grandezza, Aristotele distingue tre modi di essere infinito:

– per composizione: l'esempio tipico è quello dei numeri, di cui l'addizione e la moltiplicazione generano numeri sempre più grandi, senza limite. Due millenni più tardi questa idea servirà di base alla costruzione dei cosiddetti *cardinali transfiniti*, cioè alla teoria degli infiniti matematici.

– Per divisione: l'esempio in questo caso è la materia, divisibile all'infinito, se la si suppone continua è senza elementi insecabili, contrariamente alla concezione atomistica. È da qui che nascerà la teoria degli infinitesimi, senza la quale la fisica moderna non sarebbe mai decollata.

– Per composizione e per divisione: è il caso del tempo, cioè del movimento delle sfere celesti, che non ha né fine né principio.

Il filosofo di Stagira definisce la distinzione fondamentale tra infinito "attuale" e infinito "potenziale". L'infinito attuale è l'infinito che dovrebbe essere effettivamente realizzato in natura; l'infinito potenziale è solo una mera finzione necessaria al pensiero per risolvere certi problemi, cui però non corri-

6. Tr. it. di A. Russo e O. Longo, in Aristotele, *Fisica, Del cielo*, citato in bibliografia, pp. 60. [NdC]

sponde alcuna realtà fisica. Ma Aristotele argomenta nella sua *Fisica* che l'infinito non esiste come forma compiuta, come esistente "in atto" (vedi *Fisica*, 207 b, 1-34).[7] In particolare, come per Platone, l'Universo, inteso come grandezza fisica, non può che essere finito, chiuso dall'"ultima" delle sfere celesti, all'esterno della quale non c'è nulla.

Aristotele concede pertanto all'infinito una necessità matematica, alla quale potrebbe essere inevitabile ricorrere nelle dimostrazioni. L'infinito esiste dunque secondo un'altra modalità, in potenza. Si tratta di un modo di esistenza inferiore all'essere attuale, ma che nondimeno è reale. L'infinito in potenza è potenzialità, virtualità. Si trova nel numero, poiché quest'ultimo può crescere all'infinito, in potenza; ma non si può dare qui un numero ultimo, un numero "attualmente infinito". Non diversamente, l'infinito potenziale compare nella grandezza: per quanto a lungo la si divida, si può proseguire nella divisione; questa divisione non termina mai. Infine, il terzo termine dell'analisi aristotelica riguarda il tempo, definito dal movimento. Il tempo è insieme divisibile e aumentabile. Il movimento delle sfere celesti è dunque "senza principio e senza fine", il che conduce Aristotele a evocare l'infinito temporale. Questo tema, usualmente designato come quello della *eternità del Mondo*, è destinato a suscitare una quantità di obiezioni soprattutto tra gli apologeti delle religioni rivelate, preoccupati di fondare filosoficamente l'idea della creazione del Mondo come atto divino.

I confini del Mondo

L'idea di un Mondo finito (Terra, pianeti, stelle) circondato da un ambiente infinito, cara ai pensatori di Mileto, si ritrova presso le scuole filosofiche greche di Eraclito, di Empedocle e degli Stoici. Questi ultimi immaginano una periodicità cosmica. Dei mondi pulsanti si succedono ininterrottamente, attraversando fasi di deflagrazione e di esplosione.

7. *Ibidem*, pp. 70-71. [NdC]

Pur sussistendo delle analogie, c'è tuttavia una differenza essenziale con i modelli del Big Bang formulati dall'odierna cosmologia. I Greci distinguono tra il "Mondo fisico" e il "luogo", inteso quasi come un equivalente antico del nostro spazio geometrico: per questo pensiero greco, il Mondo (per esempio, sferico) risiede *nello* spazio che lo ingloba e lo contiene. Questo "spazio extracosmico" è infinito e privo di proprietà fisiche. Al contrario, i modelli cosmologici del nostro tempo *identificano* l'Universo con lo spazio, o piuttosto con un'entità più generale: lo *spazio-tempo-materia* (di cui tratteremo oltre). Sotto questo profilo e col senno di poi, gli aristotelici – che identificano Mondo con "spazio", l'uno e l'altro finiti – e gli atomisti – che identificano Mondo e spazio, l'uno e l'altro infiniti – hanno entrambi compiuto una tappa fondamentale nell'evoluzione della cosmologia.

1.5 Il paradosso del Mondo finito

I sostenitori di un Mondo finito sono inciampati in una difficoltà fondamentale: sembrava indispensabile assegnare a un Mondo finito un centro e una frontiera. Il centro non pone troppe difficoltà concettuali: basta collocarvi la Terra, come nei sistemi *geocentrici* dell'Antichità (le apparenze sembrano deporre in questo senso), o magari il Sole, come aveva proposto fin dal III secolo a.C. Aristarco di Samo col suo sistema *eliocentrico*. In compenso, la nozione di frontiera, o "bordo", dell'Universo è più problematica.

Archita di Taranto, pitagorico del V secolo a.C., sembra essere stato il primo a enunciare un paradosso inteso a dimostrare l'assurdità dell'idea di un bordo materiale del Mondo. Il suo argomento ha conosciuto considerevole fortuna in tutte le dispute sullo spazio: se sono all'estremità del cielo e delle stelle fisse, posso allungare la mano o un bastone? È assurdo pensare che io non lo possa fare; ma se lo posso, ciò che si trova al di là è o un corpo o lo spazio. Possiamo dunque andare al di là di questo, e così via. E se c'è sempre un nuovo spazio verso cui tendere il bastone, ciò implica chiaramente un'estensione senza limiti. Si è così condotti ad ammettere che quello che è al di là del

Mondo, sostanza o spazio, faccia sempre parte del Mondo. E pertanto, da un punto di vista logico, il Mondo non può essere limitato senza che ci si imbatta in un paradosso...[8] (figura 1.1).

Gli atomisti come Lucrezio, che nel suo poema ci offre l'immagine di una lancia scagliata al di là del bordo dell'Universo, e in seguito tutti i partigiani di un Universo infinito, come Nicola Cusano e Giordano Bruno, riprenderanno questo argomento. È chiaro che, se si concepisce l'Universo come uno spazio racchiuso in un involucro, per esempio la superficie della sfera delle stelle fisse come l'avevano immaginata Pla-

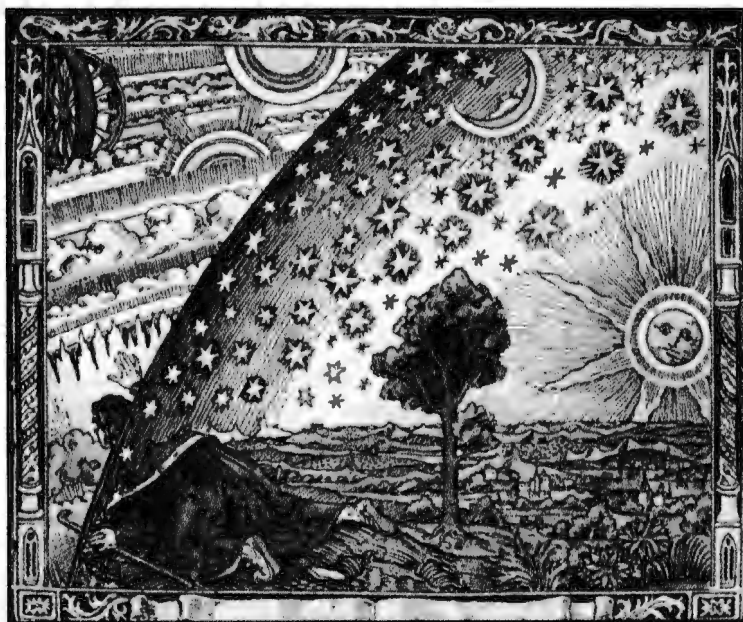



Figura 1.1 I cieli concentrici del Medioevo

Fino ai primi del Novecento si era convinti che un Mondo finito avesse necessariamente un bordo. Ma allora che cosa c'era mai oltre quella frontiera? La matematica e la fisica contemporanee hanno sciolto il paradosso: senza contraddizione è possibile concepire uno spazio finito ma senza frontiera, oltre che uno spazio infinito. Deutsches Museum, Münich collezione Carmen © Explorer. Vedi inserto a colori, tavola I.

8. Archita, DK47 A. Tr. it. di A. Maddalena in *I Presocratici*, cit., p. 491. [NdC]

tone e Aristotele, il paradosso appare senza soluzione. E tuttavia, nel corso dei secoli, i difensori dell'Universo finito andranno in cerca di spiegazioni soddisfacenti. Una di queste, scaturita dalla dottrina aristotelica e rivista dal Medioevo cristiano, propone un bordo graduale: il Mondo fisico, dominio degli elementi corruttibili, si cambia progressivamente in Mondo spirituale, di natura incorruttibile. Questa soluzione pare sciogliere il paradosso in due modi possibili: o la lancia, costituita di elementi terrestri, ricade verso il suo luogo naturale, la Terra, oppure passa effettivamente la frontiera, ma si tramuta in elemento etereo... Un'altra spiegazione meno astrusa, propugnata dagli Stoici, è quella del bordo mobile: il Mondo materiale è finito, ma è contornato da un vuoto infinito. Scagliare la lancia al di là del bordo ingrandisce semplicemente il Cosmo, spostandone la frontiera.

Bisognerà attendere lo sviluppo delle geometrie non euclidee nel secolo XIX per risolvere la controversia in modo davvero soddisfacente (§ 1.11). Queste nuove geometrie consentiranno di concepire spazi dotati di proprietà differenti rispetto a quelle che abitualmente studiamo a scuola. Per esempio, la somma degli angoli interni di un triangolo non è sempre uguale a due angoli retti; per un punto non passa sempre una e una sola parallela a una retta data, ecc. Quel che è più importante, tali spazi possono essere di estensione finita senza avere bordo, proprio come capita, in due dimensioni, con la superficie di una sfera. Inoltre, le attuali ricerche pertinenti la topologia globale degli spazi (euclidei o non euclidei) portano egualmente a soluzioni di volume infinito ma senza bordo (§ 1. 17).

Se tali spazi all'inizio sembravano possedere proprietà "mostruose", i matematici li hanno abbastanza presto riconosciuti come legittimi. A loro volta, i fisici hanno ritenuto che essi potevano offrire migliori rappresentazioni dello spazio reale. Applicate alla cosmologia, queste nuove geometrie permettono di prendere in considerazione, senza contraddizione alcuna, un Universo finito, ma senza frontiera.

Però, queste nozioni non sono affatto intuitive. Ancora oggi, nella testa di molte persone, è semmai la concezione di ori-

gine stoica che continua a dominare. Coloro che, a proposito dei modelli del Big Bang avanzati dalla cosmologia novecentesca, si domandano in cosa l'Universo si dilati, hanno appunto l'immagine mentale di un cosmo-bolla, a frontiera mobile, che si gonfia in uno spazio vuoto e infinito. Ma è proprio questa immagine che deve essere abbandonata. I modelli cosmologici relativistici identificano l'Universo con lo spazio, o più precisamente con un'entità fisica e geometrica più generale, lo *spazio-tempo-materia*. Dunque, l'Universo, sia esso finito o infinito, non può "gonfiarsi" in qualunque cosa sia, poiché non c'è spazio fuori di esso!

Il concetto di centro cosmico è eliminato dal "principio cosmologico" in virtù del quale l'Universo, omogeneo, è dappertutto lo stesso. Analogamente, la nozione di bordo dell'Universo è eliminata dal "principio del contenuto": *l'Universo fisico contiene tutto ciò che è fisico e null'altro*. Questo enunciato ci parrà piuttosto banale, ma è più profondo di quanto sembri. In particolare, ci dice che l'Universo non è un oggetto fisico come gli altri. Ogni oggetto ha un bordo – anche se questo non è netto, come nel caso del Sole o in quello di una galassia. Orbene, l'Universo non ha bordo. Lo spazio e il tempo non sono dei ricettacoli vuoti in cui può essere collocato il Mondo materiale, proprio come si fa con un oggetto qualsiasi, ma fanno parte integrante dell'Universo. Per riprendere la felice espressione di Nicola Cusano: "La fabbrica del mondo ha ovunque il suo centro e la sua circonferenza da nessuna parte".[9]

1.6 Aristotele contestato

La fisica di Aristotele affronta i problemi dell'infinitamente grande e dell'infinitamente piccolo. L'infinitamente grande va escluso, dal momento che il Mondo è finito e nulla può esiste-

9. L'espressione di Cusano nel *De docta ignorantia* (1440, vedi N. Cusano, *La dotta ignoranza*, citata in bibliografia) viene spesso attribuita a Blaise Pascal che la cita, senza fare il nome del filosofo di Cusa, nel n. 72 dei suoi *Pensieri* (Edi-

re fuori di esso. Al contrario, possiamo ammettere l'infinitamente piccolo, ma la divisibilità infinita della materia è potenziale e non attuale. Lo stesso dicasi dell'eternità del tempo.

La comparsa del Cristianesimo porta seco correzioni e trasformazioni dell'idea aristotelica dell'infinito potenziale, allo scopo di giustificare l'infinità divina, che è supposta attuale. Così, in Alessandria verso il 500 d.C., Giovanni Filopòno mette in evidenza le difficoltà teologiche sollevate dalla congiunzione delle due tesi di Aristotele relative all'infinito. Da una parte, secondo Aristotele, l'infinito attuale non esiste; d'altra parte, il tempo e il movimento non hanno né inizio né fine. Filopòno, di osservanza cristiana, propone di abbandonare la seconda ipotesi e, in questa prospettiva si sforza di dimostrare la creazione del Mondo. Altrettanto, in terra di Islam al-Kindi (800-870 ca) è uno dei rari filosofi che si oppone all'eternità del Mondo, una posizione questa che di solito è più tipica dei teologi. Un altro illustre pensatore, Avicenna (980-1037), commenta a lungo le opere di Aristotele, integrandovi elementi neoplatonici nel suo *Libro della guarigione*. Sostiene la finitezza delle grandezze geometriche come le linee, ma la sua prova della finitezza non si applica né al tempo né al movimento. Come il maestro di Stagira, Avicenna distingue tra grandezze spaziali e grandezze temporali. Per contro, sostiene l'esistenza di un infinito attuale, quello del numero delle anime umane. È per contraddire i difensori della reincarnazione che conclude che le anime umane, separate dai corpi, costituiscano una molteplicità infinita in atto! Fino a qui Aristotele era contestato su questo o quel punto particolare delle concezioni circa l'infinito. Ma un teologo delle comunità ebraiche in Aragona, Hasdai Crescas (1340-1412), contraddice globalmente l'argomento aristotelico. Autore di un'opera teologico-filosofica intitolata *La luce di Dio*, Crescas difende con veemenza ed eleganza le tesi dell'infinità dell'Universo, della pluralità dei mondi possibi-

zione Brunschvicg): "Abbiamo voglia di gonfiare le nostre concezioni, al di là degli spazi immaginabili; noi riusciamo soltanto a partorire atomi rispetto alla realtà delle cose. È una sfera infinita il cui centro è dappertutto e la circonferenza in nessuna parte" (B. Pascal, *Pensieri e altri scritti*, citato in bibliografia, p. 139).

li, dell'esistenza di un vuoto spaziale – in breve, le idee di grandezze e di numeri infiniti in atto.

Nel Medioevo cristiano il cardinale tedesco Nicola Cusano (1401-1464) contraddice anche lui Aristotele e si fa difensore dell'infinito attuale: intende la circonferenza di un cerchio come un poligono di cui il numero di angoli è infinito *in atto*. "L'infinito attuale è una modalità di conoscenza, poiché ivi le opposizioni si risolvono." In cosmologia Cusano, influenzato dal testo di Lucrezio, ritrovato nel 1417 in un monastero, sostiene l'infinità dell'Universo e la pluralità dei mondi. Nel suo *La dotta ignoranza* (*De docta ignorantia*), l'argomento è soprattutto metafisico: Dio non potrebbe essere limitato nelle sue opere; il "principio della pienezza" esige che il risultato della creazione, cioè il Mondo, non abbia anch'esso dei limiti. L'argomento sarà ripreso *ad abundantiam*, tipicamente da Bruno, Cartesio, Spinoza... Sul piano astronomico comporta il movimento della Terra. Di fatto, poiché un Mondo infinito non potrebbe aver centro, la Terra non occupa più alcun posto fisso e privilegiato nell'Universo; il movimento degli astri intorno al nostro Globo è solo apparente – è la Terra che gira su se stessa e che si muove, non l'Universo! Possiamo così considerare Nicola Cusano un precursore del principio cosmologico (formulato nel XX secolo, è alla base della cosmologia contemporanea e in particolare dei modelli del Big Bang). Questo principio è oggi illustrato dal fatto che la distribuzione delle galassie appare la stessa in tutte le direzioni ed è anche giustificato dall'osservazione della radiazione di fondo cosmologica – radiazione notevolmente uniforme, traccia del Big Bang caldo, che riempie l'Universo.[10]

1.7 Crepe nella sfera delle stelle fisse

La dottrina aristotelica, che comporta un tempo eterno e un Universo increato, viene respinta dai primi teologi del Cri-

10. Vedi M. Lachièze-Rey, *Initiation à la cosmologie*, citato in bibliografia.

stianesimo. Fino all'XI secolo, i modelli cosmologici dell'Occidente ritornano alle concezioni arcaiche dei pensatori di Mileto, cioè a un Cosmo finito, immerso nel vuoto, ma con la differenza che il Cosmo assume la forma di un tabernacolo o quella di un cuore. La cosmologia di Aristotele, perfezionata dall'astronomia di Claudio Tolomeo (fiorito verso il 150 d.C.), è però reintrodotta in Occidente grazie alle traduzioni e ai commenti degli Arabi e viene riaggiustata per soddisfare le esigenze dei teologi. Come è noto, ciò che si situa al di là dell'ultima sfera materiale del Mondo acquisisce lo statuto di spazio – se non fisico, almeno etereo o spirituale – sotto il nome di "Empireo" ed è considerato come il luogo di residenza di Dio, degli angeli e dei santi.

Il Cosmo medioevale, così ben illustrato nella *Divina commedia* di Dante, è non solo finito e centrato su una Terra immobile, ma è piuttosto piccolo: la distanza dalla Terra alla sfera delle stelle fisse è valutata 20.000 raggi terrestri, di modo che il Paradiso, alla sua frontiera, è ragionevolmente accessibile alle anime dei defunti. Il cristiano trova in modo naturale il suo posto al centro di questa architettura. Nella sua *Guida dei perplessi* il filosofo ebreo Mosè Maimonide (1135-1204) stima che il raggio della sfera delle stelle fisse corrisponda a 8.700 anni di cammino con una media di 40 leghe al giorno. Il che comporterebbe un tempo per attraversare il solo Purgatorio del tutto ragionevole per le anime di passaggio...

Nel 1543 il canonico polacco Nicolò Copernico (1473-1543) reintroduce l'eliocentrismo, vecchia ipotesi formulata già nel III secolo a.C. da Aristarco di Samo, ma restata dormiente malgrado il tentativo di Cusano. Copernico ipotizza che la Terra non sia più il centro dell'Universo; che tutte le sfere girino intorno a tale centro, che coincide pressappoco con quello del Sole; che la rotazione apparente del cielo sia dovuta al movimento della Terra e non a quello del firmamento; che essa effettui una rotazione completa sul suo asse in un giorno e una rivoluzione completa intorno al Sole nel piano dell'eclittica in un anno.

Però, Copernico conserva la concezione aristotelica di un

Universo finito, racchiuso all'interno della sfera delle stelle fisse. Si limita a dirlo immenso e rimanda la palla ai filosofi: "La sfera delle stelle fisse [...] contiene se stessa e ogni cosa".[11] Tuttavia, l'eliocentrismo porta il germe di una rivoluzione fondamentale: finché l'Universo doveva ruotare intorno a una Terra immobile, era difficile immaginare che potesse essere infinito; ma la difficoltà scompare appena viene riconosciuto che il movimento apparente del cielo è dovuto al movimento terrestre. Inoltre, Copernico amplia il Mondo medioevale. Il suo modello è 2000 volte più grande di quello di Tolomeo e di Maimonide: è già un piccolo passo verso l'infinito, non è ancora l'infinito...

Nel 1572 una "nuova stella"[12] osservata da Tycho Brahe (1546-1601) fornisce una prima evidenza atta ad accelerare lo smantellamento della filosofia aristotelica. È, infatti, nella sfera delle stelle fisse che fa la sua comparsa, cioè nel Mondo sopralunare, fino ad allora ritenuto immutabile.

Dal 1576 Thomas Digges, uno dei più abili osservatori del cielo alla propria epoca e guida dei copernicani d'Inghilterra, viola la sfera delle fisse e ne disperde le stelle nello spazio infinito. Il suo manifesto *A Perfit Description of Caelestial Orbes* (1576) contiene uno schema eliocentrico che mostra implicitamente, per la prima volta nella storia, delle stelle non più fissate su un sottile strato alla superficie dell'ultima sfera del Mondo, ma disseminate all'infinito. È questo nuovo modello

11. N. Copernico, *La rivoluzione delle sfere celesti*, in *Opere*, citato in bibliografia, Libro I, Capitolo 10, p. 211.

12. Identificata oggi con l'esplosione di una supernova. ("Una supernova è una stella di grande massa nella fase dell'esplosione che mette fine alla sua esistenza: un evento di così immane violenza, che una singola stella acquista la luminosità di un'intera galassia con oltre cento miliardi di stelle. Una supernova è un evento piuttosto raro. La maggior parte delle stelle termina la propria esistenza in un modo piuttosto tranquillo, e in una galassia come quella della Via Lattea si hanno solo alcune esplosioni di supernovae ogni secolo", J. Gribbin, *Enciclopedia dell'astronomia e della cosmologia*, citato in bibliografia, box "Le supernovae", p. 547. Ogni anno viene scoperta una decina di supernovae in altre galassie, ma nella nostra Galassia, dopo l'invenzione del telescopio, non ne è stata identificata nessuna. Per un esempio, vedi inserto a colori, tavola XIII.) [NdC]

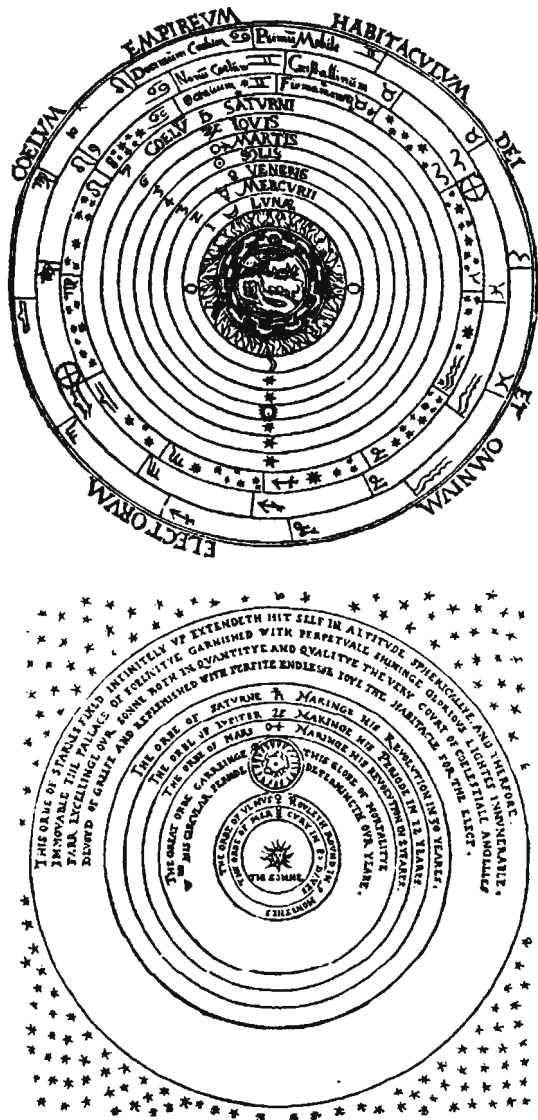



Figura 1.2 I due sistemi del Mondo, ovvero il tolemaico e il copernicano

La natura spaziale del Mondo finito è stata chiarita nel corso del tempo. Le due rappresentazioni della figura bene si prestano a illustrare l'abbandono del "Mondo chiuso" *finito* – schema geocentrico di Pietro Apiano (Peter Bienewitz, 1495-1552), 1524 –, limitato dalla sfera delle stelle fisse; invece, le stelle del nuovo Universo sono distribuite in tutto lo spazio a distanze differenti, apparentemente senza limiti (schema eliocentrico di Digges, 1576) © D.R.

che fa passare bruscamente dal Mondo chiuso degli Antichi a un Universo se non infinito, almeno estremamente vasto, popolato da innumerevoli stelle che qualcuno considererà come tanti soli (figura 1.2). Purtuttavia, Digges non propone una concezione genuinamente fisica dello spazio infinito: per lui il cielo e le sue stelle costituiscono sempre l'Empireo, "dimora di Dio", e sotto questo profilo non appartengono davvero al nostro mondo sensibile.

1.8 Giordano Bruno, ovvero l'ebbrezza dell'infinito

La vera rottura epistemologica è innescata da due filosofi italiani. Nel 1587 Francesco Patrizi (1529-1597) dà alla luce un *De spacio physico et mathematico*,[13] ove formula l'idea rivoluzionaria che il vero oggetto della geometria sia lo spazio come tale, e non le figure, come si era soliti pensare fin da Euclide. È pertanto Patrizi che inaugura un nuovo concetto di spazio fisico omogeneo e infinito, che risponde a leggi matematiche, e dunque è accessibile al nostro intelletto.

Ma è soprattutto al suo contemporaneo Giordano Bruno (1548-1600) che va attribuita l'autentica paternità della cosmologia infinitista: "Or ecco quello ch'ha varcato l'aria, penetrato il cielo, discorse le stelle, trapassati gli margini del mondo, fatte svanir le fantastiche muraglia de le prime, ottave, none, decime, et altre che vi s'avesser potute aggiongere sfere per relazione de vani matematici e cieco veder di filosofi volgari. Cossì al cospetto d'ogni senso e raggione, co la chiave di solertissima inquisizione aperti que' chiostri de la verità che da noi aprir si posseano, nudata la ricoperta e velata natura: ha donati gli occhi a le talpe, illuminati i ciechi [...]. Conoscemo che non è ch'un cielo, un'eterea reggione inmensa, dove questi magnifici lumi serbano le proprie distanze, per comodità

13. Il riferimento è alla traduzione francese di H. Védrine, Vrin, Paris 1996.

de la participazione de la perpetua vita".[14] Così il "furioso" Bruno si autopresenta nel Dialogo primo della *Cena de le Ceneri* pubblicato nel 1584!

All'argomento Bruno dedicherà non poche pagine. Il Libro primo del suo *De immenso* è interamente consacrato a una definizione logica dello spazio infinito. E già in *De l'infinito, universo e mondi* (Dialogo primo) Bruno critica aspramente il sistema aristotelico basandosi in particolare sul paradosso della frontiera cosmica, per difendere con vigore le concezioni dell'Universo infinito e della pluralità dei mondi abitati. Mescolando la sua fede e la sua immaginazione entusiasta, Bruno considera il Mondo infinito come immagine della divinità infinita: "Per che vogliamo o possiamo noi pensare che la divina efficacia sia ociosa?".[15]

Non c'è che un cielo, una immensa regione eterea dove risplendono dei meravigliosi focolai di luce che sono altrettanti soli. Siamo così condotti a scoprire l'effetto infinito di una causa infinita: un Dio di potenza infinita non poteva creare che un Universo infinito. È il trionfo della pienezza divina, che manda in frantumi i limiti del sistema medioevale: contro Platone e contro Aristotele, Bruno valorizza l'infinito del Mondo e quest'ultimo è perfetto proprio perché è infinito, piuttosto che finito!

Il cammino del pensiero del Nolano verso l'infinito muove dalla constatazione che ciò che si osserva è sempre relativo. L'orizzonte non è che un bordo apparente che si sposta con l'osservatore.[16] Con argomenti sorprendentemente moderni, Bruno confuta l'opinione comune secondo cui le stelle sareb-

14. G. Bruno, *La cena de le Ceneri*, in *Opere italiane*, citato in bibliografia, vol. I, pp. 454-455.

15. G. Bruno, *De l'infinito, universo e mondi*, in *Opere italiane*, cit., vol. II, p. 46.

16. Sempre nel Dialogo primo del *De l'infinito, universo e mondi* si legge: "A l'intelletto conviene giudicare e render raggione de le cose absenti e divise per distanza di tempo et intervallo di luoghi. Et in questo assai ne basta, et assai sufficiente testimonio abbiamo dal senso, per quel, che non è potente a contradirne, e che oltre fa evidente e confessa la sua imbecillità et insufficienza per l'apparenza de la finitudine che caggiona per il suo orizzonte, in formar della quale ancora si vede quanto sia incostante. Or come

bero tutte alla stessa distanza dalla Terra, fissate come inchiodate su un'ultima sfera. Dando libero sfogo a tutto il suo lirismo dichiara nel terzo dei sonetti proemiali che precedono il Dialogo primo:

> Quindi l'ali sicure a l'aria porgo,
> né temo intoppo di cristallo o vetro;
> ma fendo i cieli, e a l'infinito m'ergo.
> E mentre dal mio globo a gli altri sorgo,
> e per l'eterio campo oltre penetro:
> quel ch'altri lungi vede, lascio al tergo.[17]

Bruno argomenta su basi fisiche e non più meramente teologiche, predicando la propria dottrina in tutta Europa. Il suo pensiero cosmologico trae ispirazione dall'atomismo di Lucrezio, dai ragionamenti di Nicola Cusano e dalla tesi di Copernico. Di quest'ultimo Bruno mantiene l'eliocentrismo e la struttura del Sistema solare; ne respinge, però, il finitismo cosmologico che racchiudeva il mondo entro la sfera delle stelle fisse. Inoltre – in questo antesignano di Keplero e di Newton – Bruno respinge del pari il culto estetico della sfericità e del movimento circolare uniforme. Da quel momento, non ci saranno più margini, confini, limiti o muraglie che possano ostacolare e fermare l'abbondanza infinita delle cose. Ma accettare la pluralità dei mondi pone tuttavia qualche problema al pensiero teologico cristiano. Se si danno vari mondi abitati, quante volte si è dovuta realizzare l'Incarnazione? Una volta sola? La Terra sarebbe allora in una posizione eccezionale: privilegio eccessivo, se si considera l'aspetto positivo della divina incarnazione; o al contrario, terribile sfavore, poiché la Terra sarebbe allora l'unico luogo in cui è stato commesso il peccato originale. Se invece l'Incarnazione si è realizzata più di una volta,

abbiamo per esperienza che ne inganna nella superficie di questo globo in cui ne ritroviamo, molto maggiormente doviamo averlo suspetto quanto a quel termine che nella stellifera concavità ne fa comprendere" (G. Bruno, *De l'infinito, universo e mondi*, in *Opere italiane*, cit., vol. II, p. 35). [NdC]

17. G. Bruno, *De l'infinito, universo e mondi*, in *Opere italiane*, cit., vol. II, p. 41.

diviene banale per la sua stessa ripetitività, e allora non è più un miracolo, in quanto il miracolo è unico per definizione.

La vera e propria sovversione cosmologica non sta più, dunque, nella tesi eliocentrica di Copernico, ma in quella della molteplicità infinita dei mondi. È questa che compare tra i capi di accusa che portano Bruno sul rogo il 17 febbraio 1600 in Campo dei Fiori a Roma. Durante la sua prigionia, il Nolano non aveva cessato di insegnare ai suoi compagni di cella che tutti quei punti luminosi che chiamiamo stelle e che riusciva a scorgere attraverso la stretta finestrella del carcere formavano dei mondi simili al nostro.

1.9 La nuova astronomia

Nonostante la forza delle sue convinzioni, Giordano Bruno all'epoca sua ebbe ben scarsa influenza sul mondo della scienza. Del resto, nessuna osservazione astronomica sembrava appoggiare le sue concezioni, così radicalmente opposte alla dottrina cristiana. Tradito e sfigurato, il suo pensiero rimarrà incompreso alla stragrande maggioranza dei suoi contemporanei: valga per tutti il caso dell'ostilità di Galileo. Sarà riscoperto dai filosofi dell'Illuminismo del XVIII secolo; e l'immagine leggendaria del Nolano si formerà solo a metà del XIX, nel tempo in cui la scienza positivistica vorrà celebrare il proprio trionfo sulla Chiesa.

Il platonico di Cambridge

Capofila della scuola neoplatonica di Cambridge, il filosofo Henry More (1614-1687) ha seguito quasi passo a passo Giordano Bruno, spianando il terreno alla concezione di uno spazio assoluto e infinito che un altro inglese, Isaac Newton, porterà a termine. Ha consacrato all'atomismo e all'idea della pluralità dei mondi dei versi entusiastici nel suo *The Argument of Democritus Platoniffans, or The Infinity of the Worlds* (1646, vv. 100-105, 109-112):

I pianeti del nostro mondo sono nodi nella fascia universale
Della Santa *Psiche*, questa in origine era un tessuto sottile,
Uniforme, leggero e permeabile, fino a quando le potenze nascoste non li radunarono
In alcuni punti, inducendo
Le parti più vicine a combinarsi in un solo corpo.
[...]
E tutto ciò che avviene su questa stella che è la Terra
Avviene anche su ogni altra sfera.
E ogni cerchio di fuoco che vediamo in lontananza,
Non è che un nodo nell'abito di *Psiche*.

Henry More muore l'anno stesso in cui Newton rivoluziona la cosmologia con la pubblicazione dei suoi *Principi matematici della filosofia naturale* (*Philosophiae naturalis principia mathematica*, 1687).

Intanto, in Inghilterra, patria di Thomas Digges e paese meglio preservato di quelli del continente europeo dalle opposizioni dogmatiche e dalle autorità religiose, William Gilbert e Henry More difendono a loro volta l'eliocentrismo e la pluralità dei mondi. Nel suo *De magnete* (1600), Gilbert non solo dimostra che la Terra si comporta come una grande calamita, ma sostiene che le stelle sono, non diversamente dai pianeti, a distanze diverse dalla Terra, e che il Sole dirige i pianeti grazie a forze magnetiche.

I due principali artefici della rivoluzione astronomica, Keplero (Johannes Kepler, 1571-1630) e Galileo Galilei (1564-1642), restano però assai prudenti, se non diffidenti, circa la questione dell'infinito. Keplero inizialmente si sforza di costruire un modello dell'Universo impiegando particolari figure geometriche, i poliedri regolari (1596). Fallisce nel tentativo, poiché la disposizione delle orbite dei pianeti predetta dal modello non corrisponde ai nuovi dati osservativi raccolti da Tycho Brahe. In seguito (1609), con la scoperta della natura ellittica delle traiettorie planetarie, Keplero abbandona il dogma aristotelico del movimento circolare e uniforme, come spiegazione ultima dei moti celesti (figura 1.3). Ma rifiuta di

seguire Bruno nei suoi ragionamenti sull'infinità dell'Universo. Anzi, Keplero considera tale nozione come puramente metafisica e dunque priva di significato scientifico, in quanto non fondata sull'esperienza: "In verità, un corpo infinito non può essere afferrato dal pensiero. Infatti, i concetti della mente si riferiscono o al significato della parola 'infinito' o a ciò che eccede qualsivoglia misura numerica, visuale o tattile che sia; ovvero, ciò che non è infinito in atto, dal momento che una misura infinita non è concepibile".[18] Keplero illustra il proprio argomento enunciando per la prima volta un paradosso astronomico che, a prima vista, sembra costituire un ostacolo al concetto di spazio infinito, e che è destinato a una caterva di glosse e commenti: il paradosso del "buio di notte" (§ 1.14).

Figura 1.3 La "nuova astronomia" di Keplero

Nell'*Astronomia nova* (1609) Keplero propone una nuova descrizione del Sistema solare che bene si adatta ai dati osservativi forniti da Tycho Brahe: le orbite dei pianeti sono ellissi di cui il Sole occupa uno dei fuochi. Ritratto anonimo © D.R.

18. J. Kepler, *De stella nova* (1606), in *Gesammelte Werke*, citato in bibliografia, Band I, p. 253. La "nuova stella" di Keplero coincide con l'esplosione di una supernova.

Proprio come il paradosso del bordo, anche questo problema sarà risolto in modo soddisfacente solo a metà dell'Ottocento, ma con argomenti completamente diversi. A partire dal 1609, le osservazioni telescopiche di Galileo forniscono le prime dirette indicazioni dell'universalità delle leggi di natura; ma sulla questione dell'infinito spaziale Galileo, in questo vicino a Keplero, adotta un atteggiamento prudente, tipico di un fisico: "Ora che faremo, signor Simplicio, delle stelle fisse? Vogliamole pur disseminate per gl'immensi abissi dell'universo, in diverse lontananze da qualsivoglia determinato punto, o pur collocate in una superficie sfericamente distesa intorno a un suo centro, sì che ciascheduna di loro sia dal medesimo centro egualmente distante?".[19] Ed ecco la conclusione galileiana: "E non sapete voi ch'è ancora indeciso (e credo che sarà sempre tra le scienze umane) se l'Universo sia finito o pure infinito?".[20]

Resta però il fatto che, ormai, la via è aperta alle nuove cosmologie che verranno edificate sulla base di uno spazio infinito. Fino ad allora la nozione di spazio era concepita nell'ordine cosmologico e fisico della natura e non come la tela sottostante alle figure e alle costruzioni geometriche di Euclide. In altri termini, lo spazio fisico non era matematizzato. Lo diviene grazie a Cartesio (René Descartes, 1596-1650), che ha l'idea di individuare ogni punto dello spazio con una terna di numeri reali, le sue *coordinate*. L'introduzione di un sistema universale di coordinate, che riduce l'intero spazio a una sorta di scacchiera tridimensionale e consente di misurare le distanze, evidenzia come, per Cartesio, l'unificazione e l'uniformazione dell'Universo nel suo contenuto fisico e nelle sue leggi geometriche non siano più messe in dubbio. Lo spazio è una sostanza allo stesso titolo dei corpi materiali, un etere infinito agitato da innumerevoli vortici (*tourbillons*), al centro dei quali sono collocate le stelle con i loro sistemi pla-

19. G. Galilei, *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo tolemaico e copernicano*, in *Opere di Galileo Galilei*, citato in bibliografia, vol. VII, p. 353.
20. G. Galilei, "Lettera a Francesco Ingoli", in *Opere di Galileo Galilei*, vol. VI, p. 529.

netari. Né la Terra, né il Sole, né alcun astro occupano un posto privilegiato. Le stelle sono altrettanti soli che fungono da centro ad altrettanti vortici, ora simili ora differenti dal nostro Sole.

Tuttavia, da buon metafisico, Cartesio è disposto ad ammettere che se l'intelletto finito è in grado di riconoscere l'infinito, quest'ultimo resta riservato al Creatore: "Non c'è che Dio solo che io concepisca positivamente infinito", dichiara.

Il nuovo sentimento cosmico

La nuova astronomia, abbattendo le "muraglie" delle sfere celesti e allargando i confini del Mondo fino a dissolverli in uno spazio infinito, offre allo spirito umano, a lungo soffocato in prigione, l'ebbrezza della liberazione. Tuttavia, sovvertendo il pensiero filosofico e il sentimento cosmico che l'essere umano sempre prova di fronte all'Universo, questa nuova concezione del Cosmo può condurre ben lontano dall'entusiasmo iniziale degli atomisti e dello stesso Bruno. Il Mondo chiuso, cioè l'Universo custodito nell'involucro delle sfere concentriche, era tutto sommato rassicurante, poiché forniva all'uomo una dimora limitata a sua misura. Invece, l'Universo infinito poteva facilmente diventare fonte di angoscia e di terrore, in quanto, non trovandovi più né centro né bordo, l'individuo perdeva ogni riferimento. La distruzione del Cosmo e la perdita per la Terra della sua collocazione centrale, e perciò stesso unica, conducono inevitabilmente gli esseri umani a rinunciare alla loro posizione unica e privilegiata nello scenario della Creazione. Alla fine di tutto questo riorientamento, troviamo il mondo muto e terrificante del libertino di Pascal: "Il silenzio eterno degli spazi infiniti mi sgomenta".[21] Così, "lo spazio assoluto che era stato una liberazione per Bruno fu un labirinto e un abisso per Pascal".[22]

21. N. 206, Edizione Brunschvicg in B. Pascal, *Pensieri e altri scritti*, cit., p. 194. [NdC]

22. J.L. Borges, "La sfera di Pascal" in *Altre inquisizioni*. Vedi J.L. Borges, *Tutte le opere*, citato in bibliografia, vol. I, p. 914.

1.10 La cosmologia di Newton

La tendenza alla geometrizzazione dello spazio e alla sua infinitizzazione, avviata da Bruno, da More e da Cartesio, viene realizzata pienamente da Isaac Newton (1642-1727). Questo "filosofo della natura" spiega la meccanica celeste in termini di attrazione universale, ovvero in termini di gravitazione, ormai considerata responsabile della strutturazione del Cosmo. Poiché la portata della forza di gravità è infinita, la cosmologia newtoniana postula anch'essa uno spazio infinito e assoluto. Si tratta di una nozione insieme matematica, fisica e astronomica; ma anche metafisica, poiché lo spazio è "l'organo sensibile di Dio". Lo spazio fisico, identificato infine con lo spazio geometrico, è necessariamente euclideo (l'unico cono-

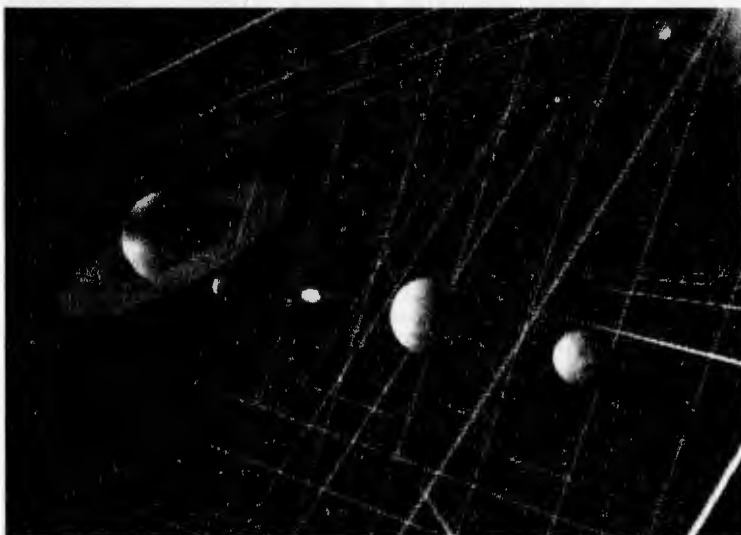



Figura 1.4 L'Universo newtoniano

Questa immagine dello spazio cosmico newtoniano permette di visualizzare la struttura dello spazio euclideo infinito, tessuto da raggi luminosi dotati di traiettoria rettilinea. Pianeti, stelle e galassie si muovono lungo orbite incurvate da una forza di attrazione universale. Immagine tratta dal film *Infiniment courbe*, sceneggiatura di Laure Delesalle, Marc Lachièze-Rey e Jean-Pierre Luminet, CNRS Images ©. Vedi inserto a colori, tavola III.

sciuto a quell'epoca), senza curvatura, inalterabile e infinito in tutte le direzioni (figura 1.4). In questo rigido quadro, la gravitazione struttura l'Universo e così, con Newton, la cosmologia, per più di due secoli, si radica nel contesto di uno spazio euclideo infinito, e – ancora per l'influenza dell'eredità greca – di un tempo eterno. Nella cosmologia newtoniana non sono certo risolti tutti i problemi, anzi! Per esempio, Newton ritiene che le stelle si distribuiscano in una regione finita dello spazio. In effetti, dice lui, se occupassero uno spazio infinito, sarebbero in numero infinito, la forza di gravità sarebbe infinita e l'Universo risulterebbe instabile. Newton suppone dunque le stelle distribuite in modo uniforme, così da formare un'agglomerazione finita – per esempio, la nostra Galassia. Ma il problema dell'instabilità ricompare: dal momento che ogni corpo celeste è attirato da qualsiasi altro, al minimo movimento, alla minima perturbazione meccanica, tutti i corpi dell'Universo cadrebbero verso un centro unico e l'Universo collasserebbe. L'Universo di Newton può dunque persistere solo se non ammette movimenti su grande scala: il suo spazio è rigido e il suo tempo irrigidito.

"... e Newton fu"[23]

Isaac Newton entra al Trinity College di Cambridge nel 1661, per studiarvi matematica. La peste di Londra lo spinge a ritirarsi in campagna, ed è allora che appresta i suoi primi strumenti di calcolo per la meccanica. Qualche decennio prima Keplero aveva scoperto le leggi del movimento dei pianeti, e aveva pensato a una forza attrattiva di tipo magnetico che emanasse dal Sole; Galileo aveva pubblicato un sistema del mondo copernicano che unificava le leggi della fisica celeste e terrestre, Cartesio aveva poi proposto un modello di Universo che segnava la rottura definitiva con la concezione antica di un Mondo chiuso e

23. È ovviamente un'allusione ai celebri versi di Alexander Pope (1688-1744): "*Nature and Nature's laws hid in night. / God said, 'Let Newton be' and all was light*" ("La Natura e le leggi della Natura giacevano nascoste nell'oscurità; / disse Dio: 'sia Newton', e tutto fu luce"). [NdC]

geocentrico, a vantaggio invece di uno spazio infinito riempito di una materia fluida che si struttura in vortici.
Tuttavia, il giovane Isaac si rende conto che il movimento di alcuni pianeti e delle comete elude la spiegazione di Cartesio. C'è bisogno di una nuova teoria. Newton intuisce che la caduta dei corpi sotto l'effetto della gravità terrestre e il movimento dei pianeti intorno al Sole sono due aspetti di un fenomeno universale; e definisce la gravità come una forza attrattiva. Già nel 1666 formula l'ipotesi che tutti i corpi dotati di massa si attirino reciprocamente e, anzi, dimostra geometricamente che il movimento di un pianeta lungo un'ellisse, di cui il centro di forza è collocato nel fuoco occupato dal Sole, implica necessariamente una legge in cui compaia una forza proporzionale alle masse dei due corpi (il Sole e il pianeta) e inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza. Ed è per l'esigenza di questa dimostrazione che Newton escogita il calcolo delle flussioni, versione del calcolo infinitesimale diversa da quella che sarà trovata indipendentemente da Leibniz. È solo nel 1687, spinto dell'astronomo Edmund Halley (1656-1742), che però Newton fa conoscere i suoi risultati nella prima edizione del suo capolavoro *Philosophiae naturalis principia mathematica*.

Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716) protesta contro questa concezione. Anche lui ritiene che lo spazio sia infinito, ma resta in profondo disaccordo con Newton su svariati punti. Per Leibniz lo spazio non ha nessun carattere assoluto: è un sistema di relazione ideale tra i corpi, che non ha dunque esistenza reale indipendente da questi ultimi. D'altra parte, egli ritiene che le stelle siano distribuite in modo uniforme nello spazio infinito, in quanto, se così non fosse, esisterebbe una sfera che comprende tutte le stelle; l'Universo fisico sarebbe allora limitato da tale sfera e avrebbe un centro, il che, dal punto di vista copernicano (in virtù del quale non deve esistere alcuna posizione privilegiata nell'Universo) è del tutto inammissibile.

I poeti dell'infinito[24]

Cambiando drasticamente la nostra concezione del Mondo e il punto di vista sul posto dell'uomo nell'Universo, l'avvento dell'astronomia newtoniana comporta profonde ripercussioni tra filosofi, letterati e poeti. Tale astronomia finisce col produrre una scissione nei diversi caratteri: da una parte, coloro che, alla sola idea di una Terra ridotta a una nave che vaga in un oceano infinito, hanno il mal di mare; dall'altra, coloro che, marinai per vocazione, non temono i flutti...
Tra i poeti, dal 1742 l'inglese Edward Young (1683-1765) è assurto a cantore dello spazio newtoniano e del suo infinito addomesticato. Le sue *Notti* (*Night's Thoughts on Life, Death and Immortality*) influenzeranno intere generazioni di poeti europei. In Italia il conte Giacomo Leopardi (*L'infinito*, 1819) descrive in versi il "mare" in cui si trasforma l'esistenza quando viene considerata fuori del tempo e dello spazio: giustifica così la tendenza (a suo parere naturale) della creatura umana verso l'infinito. Viaggiatore cosmopolita, George Byron presenta in "L'abisso dello spazio" (II atto del suo dramma *Caino*, 1822) la sua doppia visione dell'infinito: l'infinito dall'alto sfocia sulla grandiosa anticipazione di mondi brulicanti di vita; ma c'è anche quello che Victor Hugo chiamerà *"L'infini d'en bas"*, l'abisso interiore in cui sprofondano le anime perdute.
Sull'altra sponda dell'Atlantico Walt Whitman, nel suo *Canto di me stesso* (*Song of Myself*, 1855), non è soltanto inebriato dall'infinito, ma ne prende possesso. Poeta dell'espansione, dilata anche se stesso con allegria nel medesimo tempo in cui dilata l'Universo. L'infinito è sua proprietà privata: lo percorre da padrone, valutandone il raccolto. Nulla deve fare difetto alla Creazione, né lui stesso, Whitman, né alcunché nelle miriadi di miriadi di esseri e oggetti. La sua filosofia della soddisfazione si sviluppa: a ciascuna creatura deve bastare il suo posto, poiché il suo posto è il migliore.

Non finirà, non potrà mai finire,
Se io, tu, i mondi e tutto ciò che si trova sopra o sotto la loro superficie,
fossimo nello stesso istante ricondotti allo stadio di pallida nebbia che

24. Vedi J.-P. Luminet, *Les poètes et l'Univers*, citato in bibliografia.

fluttua nello spazio, questo non avrebbe infine alcuna importanza,
Noi risaliremmo certamente fin qui: dove in questo momento siamo,
E andremmo certamente due volte più lontano e di là più lontano e ancora più lontano.
Pochi quadrilioni di ere, pochi ottilioni di chilometri cubi non mettono in pericolo il presente né lo rendono impaziente,
Sono solo delle parti, tutto è solo una parte.
Per quanto il tuo sguardo conduca lontano, al di là c'è uno spazio infinito,
Per quanto sia grande il numero al quale tu giungi, c'è il tempo infinito al di qua e al di là.

Nella seconda metà dell'Ottocento, la concezione newtoniana dello spazio domina più che mai. *Les poèmes à travers l'infini* di Marc Bonnefoy hanno per sottotitolo *Newton guide le siècle dans l'espace*! In certe strofe lo scienziato inglese viene evocato sulla scena per rassicurare il viaggiatore cosmico che potrebbe provare di fronte ai neri spazi il brivido della morte. Fa la sua comparsa anche il tema della pluralità dei mondi: a cosa servirebbe mai l'infinito se i mondi non brulicassero di vita?

Va il tempo senza sosta da un evo all'altro evo,
E sempre e senza posa si svolge l'Infinito;
I nostri vani sforzi non toccano il traguardo.
E invano ci stanchiamo su questa immensa strada
Che sempre va o sempre ricomincia
Senza muovere un passo!

Splendono sempre soli nell'etere abitato,
Scintillano le stelle lontano, più lontano
S'aprono all'improvviso dei firmamenti nuovi,
Sempre in quella distanza che il desiderio attinge,
Avvampano degli astri, si spengono degli astri,
Ammassi d'Universo!

Ma abbiamo visto solo uno spicchio di cielo,
Un riflesso dei lumi della vasta distesa;

E possiamo volare di un eterno slancio
Senza toccare il sommo, né cadere agli abissi;
Si stende l'Infinito senza baratri o vette:
È Spazio e ancora è Spazio!

1.11 Dagli universi isola al Cosmo chiuso

La cosmologia newtoniana segna il trionfo (ovviamente provvisorio) dell'infinito spaziale e temporale. Il Secolo dei Lumi debutta così sotto il segno dell'Universo infinito. Desiderosi di trovarvi una qualche forma di organizzazione, alcuni pensatori sviluppano l'idea che lo spazio non sia popolato uniformemente di stelle, ma che queste siano raggruppate in "universi isola" (le nostre attuali galassie), sottomessi anch'essi a una certa organizzazione gerarchica. Più che astronomi professionisti, sono dei "filosofi della natura" a proporre tali idee originali sulla struttura cosmica. Emmanuel Swedenborg (*Opera philosophica et mineralia*, 1734), Thomas Wright (*Original Theory*, 1750), Johann Heinrich Lambert (*Kosmologische Briefe über die Einrichtung des Weltbaues*, 1761) e soprattutto Immanuel Kant (1724-1804). Nella sua *Storia universale della natura e teoria del cielo*, opera di gioventù, il grande filosofo di Königsberg scrive: "E quanto ancora dovrà aumentare questa meraviglia nel constatare che questi innumerevoli sistemi di stelle non sono che l'unità di un numero i cui limiti ci sfuggono e che, a sua volta, non è forse che l'unità di una nuova combinazione di numeri! Vediamo appena i primi termini d'una progressione continua di mondi e di sistemi, ma essi bastano a rivelarci quel che dobbiamo pensare dell'insieme".[25] Kant riprende pure il vecchio argomento teologico secondo cui il Mondo è infinito perché Dio è infinito, e il mondo da Dio dipende. Più tardi nella *Critica della ragion pura* (1781) tratta più profondamente il problema dell'infinito in relazione

25. I. Kant, *Storia universale della natura e teoria del cielo*, citato in bibliografia, p. 26.

con la questione cosmologica: il mondo ha un inizio nel tempo e un limite nello spazio. Il filosofo di Königsberg confuta l'infinità temporale dell'Universo, riprendendo un classico argomento di Tommaso d'Aquino: è impossibile concepire una successione insieme infinita e trascorsa. Per quanto riguarda lo spazio, la concezione kantiana si avvicina (contro Leibniz) a quella dello spazio assoluto: questo però non è più sostanzializzato. Kant collega questa nozione alla nostra stessa esperienza sensibile. Nelle sue aporie Kant mostra l'impossibilità di costruire senza contraddizione logica tanto un Universo finito quanto un Universo infinito. La questione ha davvero senso? È pertinente discuterne?

L'argomentazione kantiana mira a riconciliare fisica e metafisica. L'analisi dello spazio è pertinente ma incompleta, poiché si basa su certi presupposti dell'epoca (gli spazi non euclidei erano ancora sconosciuti): per esempio, che il carattere finito implica un limite, mentre l'infinito implica l'assenza di limiti. A metà del secolo XIX un manipolo di audaci geometri – Gauss, Bolyai, Lobačevskij e Riemann – farà emergere nuove geometrie che verranno battezzate *non euclidee*. Sono costoro a dimostrare che la validità della geometria euclidea, all'apparenza garantita dal buon senso, non è affatto universale. Essa si fonda sul V postulato di Euclide, indimostrabile: da un punto si può condurre una e una sola retta parallela a una retta assegnata che non passi per quel punto. Cosa risulterebbe dalla modificazione di questo postulato? Si perverrebbe a delle incoerenze se si supponesse, per esempio, che si potesse far passare per quel punto un'infinità di parallele (spazio di Lobačevskij) o invece nessuna (spazio di Riemann)? Niente affatto. Le geometrie costruite su questi nuovi postulati sono altrettanto coerenti che la geometria euclidea. Dal punto di vista puramente logico, essa perde la sua collocazione privilegiata e diviene un particolare sistema tra altri.

Bernhard Riemann, nel 1854, mostra (come noto) che uno spazio sprovvisto di limite non è necessariamente infinito. La sua dimostrazione è analoga agli argomenti che permettono di dimostrare che la superficie della Terra è curva e finita, anche

se priva di limiti. Riemann dà l'esempio di un particolare spazio non euclideo, uno spazio tridimensionale, *l'ipersfera*: "L'illimitatezza dello spazio possiede dunque una certezza empirica maggiore di qualsiasi esperienza esterna. Da qui non consegue affatto, però, l'infinitezza; piuttosto, se si presuppone l'indipendenza dei corpi dal luogo e gli si ascrive così una misura di curvatura costante, lo spazio sarebbe necessariamente finito, non appena questa misura di curvatura avesse sia pure il più piccolo valore positivo. Prolungando in linee di minimo percorso le direzioni iniziali che si trovano in un elemento di

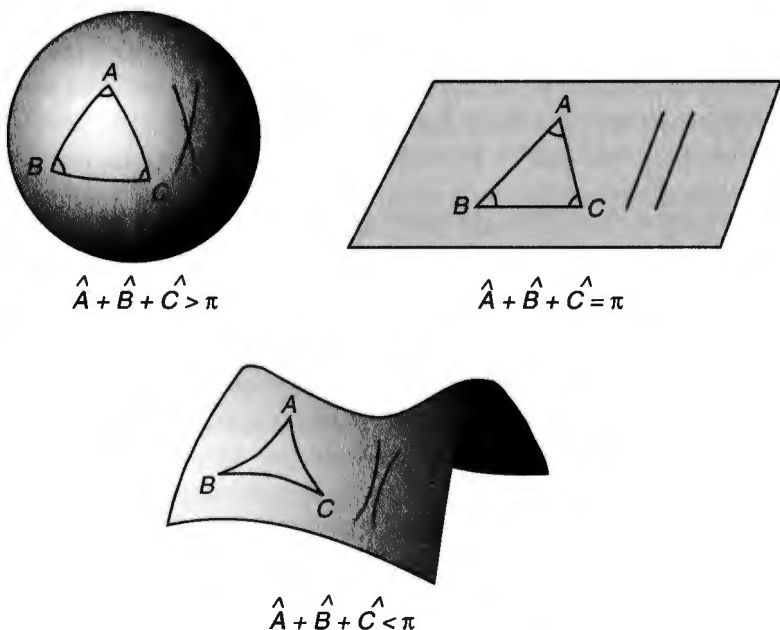



Figura 1.5 Tre tipi di superficie curve

La superficie della sfera ha una curvatura positiva; il piano ha una curvatura nulla; e una sella di cavallo ha una curvatura negativa. Sulla sfera la somma degli angoli di un triangolo è maggiore di 180 gradi; nel piano esattamente uguale a 180 gradi; sulla sella minore di 180 gradi.
Gli spazi tridimensionali possono essere curvi come le superficie, ma in maniera più complicata. In linea di principio è possibile rilevare la curvatura dell'Universo misurando gli angoli formati da un gigantesco triangolo cosmico.

superficie, si otterrebbe una superficie illimitata, con misura di curvatura costante, positiva, cioè una superficie che in una varietà piana e triestesa assumerebbe la forma di una superficie sferica e dunque finita"[26] (figura 1.5).

Non soddisfatto di ragionare su spazi astratti, Riemann stesso vuole applicare le proprie scoperte alla cosmologia: è il primo a proporre un modello di Universo finito ma senza frontiera, descritto geometricamente, appunto, da una ipersfera.[27] Alla fine, il paradosso del bordo può dunque essere risolto! L'infinito (geometrico) va distinto dall'illimitato: possiamo concepire uno spazio illimitato (cioè senza frontiera) ma finito, come la superficie di una sfera. L'identità tra infinito e illimitato vale nel solo contesto euclideo. Il non tener conto della fondamentale scoperta delle geometrie non euclidee doveva fortemente ridurre la portata di molte delle discussioni filosofiche sull'infinito posteriori a Kant.

Un Cosmo curvo?

Nel 1900 l'astronomo tedesco Karl Schwarzschild (1873-1916) pubblica un articolo di cosmologia che passa inosservato, ma che, col senno di poi, ci appare quasi come una premonizione. Questa mente originale rientra nel gruppo di quei rari astronomi dell'epoca sua che conoscono abbastanza matematica avanzata per capire le sottigliezze delle geometrie non euclidee. Così, emerge in modo naturale la questione di sapere se lo spazio reale possa essere curvo. Schwarzschild, in effetti, a partire dai dati osservativi, cerca un limite inferiore per il raggio di curvatura dello spazio (lo spazio euclideo corrisponde a un valore infinito). A quel tempo, la natura extragalattica delle nebulose spirali non è stata ancora accertata, e il modello correntemente accettato sulla disposizione generale degli astri tende a considerare tutti gli astri visibili come appartenenti alla Via Lattea, considerata come un unico

26. B. Riemann, *Sulle ipotesi che stanno alla base della geometria, e altri scritti scientifici e filosofici*, citato in bibliografia, p. 18.

27. Vedi ancora B. Riemann, *Sulle ipotesi che stanno alla base della geometria, e altri scritti scientifici e filosofici*, cit. in particolare pp. 3-20. [NdC]

isolotto di materia perduto in un oceano di vuoto illimitato. Schwarzschild si domanda allora se quest'isola non potrebbe occupare l'intero spazio, a condizione che quest'ultimo sia finito, piccolo e senza frontiera, proprio come ne indica la possibilità la geometria riemanniana. Dopo aver stimato la separazione media delle stelle e formulata l'ipotesi che l'Universo ne contenga cento milioni, il nostro astronomo perviene al risultato che la materia occupa un raggio dello spazio superiore al milione di unità astronomiche (l'*unità astronomica* è la distanza Terra-Sole, ovvero 150 milioni di chilometri). Ciò gli permette di individuare un confine inferiore al raggio di curvatura dello spazio: "Si può, senza contraddizione alcuna con l'esperienza, supporre che l'Universo sia contenuto in uno spazio iperbolico con un raggio di curvatura maggiore di 4 milioni di unità astronomiche, o in uno spazio ellittico finito con un raggio di curvatura maggiore di 100 milioni di unità astronomiche".[28] Sedici anni più tardi Schwarzschild acquisirà una certa fama con la scoperta (quand'era nelle trincee del fronte russo) della prima soluzione esatta delle equazioni della relatività – soluzione che rappresenta lo spazio-tempo curvo intorno a un buco nero (§ 4.1).

1.12 Il nuovo spazio-tempo

La rivoluzione cosmologica dei primi decenni del Novecento è il frutto della congiunzione tra l'avanzamento teorico offerto dalla relatività generale di Einstein e una messe di risultati osservativi. La relatività generale sovverte gli stessi concetti di tempo e di spazio. L'Universo non è più una struttura spaziale (spazio euclideo) immutabile, in cui si svolgono i fenomeni prodotti dalle forze (fisiche); diviene uno spazio-tempo "deformabile", quello che i matematici chiamano una *varietà* a quattro dimensioni (tre per lo spazio, una per il tempo), deformata dalla presenza della materia. Questa deformazione corrisponde alla gravità, assimilata così alla *curvatura* dello spazio-

28. Per questo "premonitore" articolo di Schwarzschild, vedi J.-P. Luminet, *La segreta geometria del cosmo*, citato in bibliografia, pp. 119-120. [NdC]

tempo. Sotto questo profilo, tale curvatura detta le traiettorie possibili delle particelle materiali dei raggi luminosi assoggettati ad aderire ai contorni della geometria curva (figura 1.6).

Le equazioni fondamentali della relatività, o equazioni di Einstein, descrivono la maniera in cui il contenuto di materia dell'Universo deforma la geometria dello spazio-tempo. La teoria consente così una descrizione dell'Universo nel suo insieme, mediante plausibili *modelli cosmologici*. Ben inteso, nell'insieme delle soluzioni che la teoria ammette come lecite per descrivere il nostro Universo, solo alcune si accordano con le osservazioni astronomiche.

Nel 1917 è Einstein a proporre un primo modello di universo relativistico. Si tratta di una svolta radicale che sulla questione dello spazio finito-infinito propone un approccio ben differente da quelli tradizionali. Non diversamente da

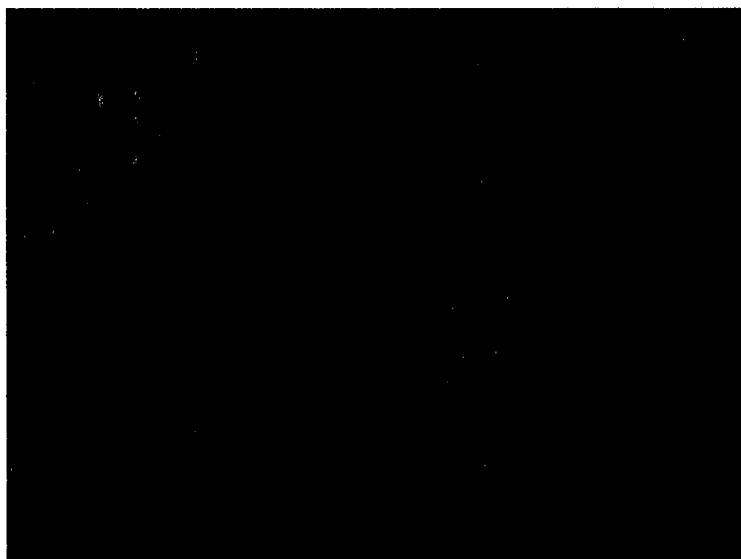



Figura 1.6 L'Universo relativistico

La relatività generale offre una nuova visione dell'Universo in termini di spazio-tempo flessibile, tessuto dalla luce, incurvato dalla materia. Immagine tratta da *Infiniment courbe*, sceneggiatura di Laure Delesalle, Marc Lachièze-Rey e Jean-Pierre Luminet, © CNRS Images. Vedi inserto a colori, tavola IV.

Riemann, anche Einstein pensa a un Universo chiuso, cioè di volume e di circonferenza perfettamente finiti e misurabili, e senza frontiera; sceglie così l'ipersfera per modellizzare la parte spaziale dell'Universo.

Con questo suo articolo che inaugura la cosmologia novecentesca Einstein ha consapevolezza di avventurarsi in un terreno nuovo. Di fatto, fa esattamente il contrario di quella filosofia "positivistica" che si potrebbe far risalire alle parole di Kant nella *Critica della ragion pura*: "Nessuna osservazione potrà confermare la tesi della cosmologia razionale, il cui oggetto trascende ogni possibile esperienza".[29] È proprio questo che il modello di Einstein batte in breccia. Questi scrive in *Geometrie und Erfahrung* (*Geometria ed esperienza*, 1921): "Il problema se l'Universo sia o no uno spazio finito, mi sembra un problema assolutamente legittimo nel senso della geometria pratica. Non considero nemmeno impossibile che questo problema riceva tra non molto una risposta dall'astronomia".[30]

Ed Einstein prende nettamente partito per un Universo spazialmente finito, allo scopo di non contraddire l'ipotesi di Mach sull'inerzia dei corpi: "Non devo dimenticare di ricordare che un argomento teorico può essere addotto in favore dell'ipotesi di un Universo finito. La teoria generale della relatività insegna che l'inerzia di un corpo determinato è tanto più grande quanto più grandi masse ponderabili gli sono vicine; quindi sembra molto naturale ridurre l'inerzia totale di un corpo alla interazione fra esso e gli altri corpi dell'Universo, come infatti, fin dai tempi di Newton, la gravità era stata completamente ridotta all'interazione fra corpi. Dalle equazioni della teoria generale della relatività può dedursi che questa totale riduzione dell'inerzia all'interazione fra masse – come richiede E. Mach, per esempio – è possibile solo se l'Universo è finito".[31]

Il modello di Einstein, del resto, si basa sull'ipotesi di un Universo statico: il raggio dell'ipersfera non varia nel corso

29. I. Kant, *Critica della ragion pura*, citato in bibliografia, p. 423.
30. A. Einstein, "Geometria ed esperienza", in *Idee e opinioni*, citato in bibliografia, p. 222.
31. *Ibidem*.

del tempo. In verità, le soluzioni cosmologiche della relatività consentono perfettamente di prendere in considerazione uno spazio che si dilata e si contrae nel tempo come dimostrerà, tra il 1922 e il 1924, il teorico russo Alexandr Fridman. Il modello di Einstein sarà infine abbandonato a vantaggio delle soluzioni dinamiche. Ma la sua novità resta: è possibile concepire uno spazio finito e senza confine; è del resto egualmente possibile concepire uno spazio infinito. La relatività ha dunque completamente attualizzato il dilemma finito-infinito, mettendo a disposizione dei cosmologi spazi esplicitamente finiti ed esplicitamente infiniti.

1.13 Un Universo in espansione

Mentre affiancano la rivoluzione concettuale scaturita dalla relatività, i progressi in campo osservativo del primo secolo XX sono debitori a varie innovazioni tecniche, in particolare alla messa in opera del telescopio di 2,50 metri di diametro di Mount Wilson negli USA. Edwin Hubble sfrutta l'occasione di utilizzare per primo questa nuova sonda cosmologica per esplorare l'Universo. Nel 1924 l'astronomo americano mostrerà che la nebulosa NGC 6822 è collocata molto lontano, fuori dalla nostra Galassia: così, questo astro diventa il "primo oggetto definitivamente assegnato a una regione esterna al sistema galattico". In brevissimo tempo, Hubble e i suoi collaboratori evidenziano che questo è il caso di tutte le nebulose spirali, tra cui spicca la nostra celebre vicina, la nebulosa di Andromeda: si tratta di tante galassie come la nostra, e l'Universo è costituito appunto dall'insieme delle galassie. Gli "universi isola", già immaginati da Wright e da Kant, sono ora legittimati dall'esperienza e l'universo materiale sembra all'improvviso immensamente ingrandito, poiché passa da qualche migliaio a svariate decine di milioni di anni luce. Non c'è solo questo allargamento spaziale. La seconda scoperta capitale riguarda l'evoluzione temporale dell'Universo. Fino dai primi del Novecento si accumulano indizi che farebbero cre-

dere che le galassie si allontanino sistematicamente dalla nostra, con velocità proporzionali alla loro distanza. Questo risultato empirico resta totalmente incomprensibile fino al momento in cui la comunità scientifica, agli inizi degli anni Trenta, accetta la soluzione proposta nel 1927 dal fisico belga Georges Lemaître: l'intero spazio si dilata nel corso del tempo; è in espansione e questa espansione trascina seco l'insieme delle galassie.

Si tratta di un passo concettuale gigantesco, in quanto fin dalla più remota antichità il cielo era considerato privo di qualsiasi evoluzione. Certo, dal Rinascimento si era ammesso che si potessero produrre nel cielo fenomeni nuovi, ma nessuno aveva mai osato concepire che l'Universo potesse *evolvere globalmente*. Lo stesso Einstein si era lasciato conquistare da quel presupposto quando aveva costruito il suo modello statico. Il mito dell'Universo statico, o stazionario, è rimasto, del resto, ben radicato nelle menti umane per lungo tempo. D'altra parte, certuni non sono stati capaci di venire a patti con questo ribaltamento concettuale e accettare i modelli che ne derivano, i celebri modelli del "Big Bang".

Resta però il fatto che l'Universo non è più, e non potrà più essere, nella coscienza degli umani, un quadro immutabile ed eterno in cui si svolgono gli eventi cosmici. Ormai, è lecito pensare che l'Universo si trasformi ed evolva (ed è sempre più difficile non ammetterlo). Grazie a Lemaître, i fisici hanno cominciato a comprendere la radicale ristrutturazione dei paesaggi dello spazio e del tempo che tutto ciò implica.

1.14 Il primo paradosso dello spazio infinito: perché fa buio di notte?

A prima vista, non sembrerebbe esserci motivo di meravigliarsi che la notte sia buia. Il Sole, ormai "tramontato", non ci manda più la sua luce; restano solo le stelle per illuminare debolmente il paesaggio notturno. Supponiamo però che lo spazio sia infinito e riempito uniformemente di astri (stelle, galas-

sie). In qualsiasi direzione guardassimo, dovremmo trovare un astro più o meno lontano sulla nostra linea di visuale. La somma di luminosità di tutti questi astri dovrebbe rendere il cielo notturno così splendente come in pieno giorno, e forse di più. Lo sfondo del cielo assomiglierebbe a una volta sfolgorante, tappezzata in modo continuo di stelle, paragonabile complessivamente a un sole gigantesco. Perché le cose non stanno così? Se esistono altre stelle che hanno la stessa natura della nostra, come accade che, prese tutte insieme, non superino per fulgore il nostro Sole? Questo è il paradosso del buio di notte. Per capirlo bene, paragoniamo l'Universo a una foresta e le stelle a tronchi di alberi identici, largamente distanziati. I tronchi più vicini ci appaiono più grossi, i più lontani ci sembrano più piccoli; ma è ovvio che, se la foresta è sufficientemente grande, i tronchi quasi si sovrappongono a formare uno sfondo continuo che sembra circondarci di un luminoso muro circolare. Il problema viene formulato per la prima volta da Keplero nel 1610;[32] poco prima, nello stesso anno, il *Sidereus nuncius*, pubblicato da Galileo, aveva fatto il punto sulle prime osservazioni con il cannocchiale, rilevando molte più stelle di quante se ne potessero immaginare. Il paradosso del buio di notte costituisce a prima vista un ostacolo per il concetto di spazio omogeneo e infinito. Ma Keplero, che non condivide per nulla la concezione di Bruno, secondo cui il Sole è un mondo come tutti gli altri in mezzo a stelle disperse all'infinito, può rispondere al paradosso, scegliendo un modello di Universo finito, limitato da un muro o da una volta. In quest'ultimo caso, le stelle sono di numero troppo scarso per coprire tutto il cielo, e non c'è più alcuna ragione per cui lo sfondo celeste risulti risplendente.

Nonostante questa spiegazione cozzi col paradosso del bordo, Keplero la considera la sola via di uscita possibile per spiegare l'oscurità notturna. Ma il Settecento vede il trionfo della concezione newtoniana dello spazio infinito, a svantaggio del Cosmo chiuso invocato da Keplero e dai suoi predecessori. È

32. J. Kepler, *Dissertatio cum Nuncio Sidereo*, citato in bibliografia.

in questo nuovo quadro concettuale che l'indagine sul perché faccia buio di notte viene ripresa nel 1721 dal celebre astronomo inglese Edmund Halley: "Se il numero di Stelle Fisse superasse la finitezza, l'unione dei loro Dischi apparenti formerebbe una superficie luminosa". Più tardi, nel 1743, Jean-Philippe Loys de Chésaux calcola che il cielo sia di giorno sia di notte dovrebbe essere 90.000 volte più brillante del Sole!

All'inizio del XIX secolo, a Brema in Germania, un medico e astronomo dilettante trascorre le notti a scrutare il cielo con l'aiuto di un piccolo cannocchiale installato sul tetto di casa sua: Heinrich Olbers (1758-1840) scopre un pianetino, Pallade, e alcune comete. Nel 1823 si dedica anche lui alla trasparenza dello spazio cosmico: "Se vi sono realmente dei soli in tutto lo spazio infinito, [...] il loro insieme è infinito, e quindi il cielo tutto intero dovrebbe essere brillante quanto il Sole. Poiché ogni retta che immagino tracciata a partire dai nostri occhi incontrerà necessariamente una stella fissa qualsiasi, di conseguenza ogni punto del cielo dovrebbe inviarci della luce stellare, dunque della luce solare".[33] Questa volta l'osservazione fa centro! Il paradosso del buio di notte sarà usualmente ribattezzato "paradosso di Olbers".[34]

Come rispondervi nel quadro della cosmologia newtoniana? Varie sono le soluzioni proposte. Anzitutto, le altre stelle sono davvero analoghe al Sole? Ahimè, la risposta è sì! Anche se taglie, masse, luminosità e colori possono variare, ogni stella resta in media paragonabile all'astro che riscalda il nostro pianeta. In particolare, la loro brillanza superficiale è pressappoco la stessa. Non è questa la via per sciogliere il paradosso.

È stata avanzata un'altra ipotesi che suppone l'Universo riempito di materia diffusa in grado di assorbire una parte rilevante della luce delle stelle. Oggi sappiamo che lo spazio tra le

33. "La trasparence de l'espace cosmique". Tr. fr. di J. Merleau-Ponty in *La science de l'Universe à l'âge du positivisme*, citato in bibliografia, p. 321.

34. Per una esposizione del paradosso e della sua storia vedi il box "Il paradosso di Olbers" in J. Gribbin, *Enciclopedia dell'astronomia e della cosmologia*, cit., pp. 381-383. Per una più ampia trattazione vedi E.R. Harrison, *Darkness at Night*, citato in bibliografia. [NdC]

galassie è riempito di polveri e di gas molto fini. Però, sappiamo pure che queste particelle non possono assorbire radiazioni senza restituirle in un modo o nell'altro. Nemmeno così può venir sciolto il paradosso del buio di notte. Passiamo a una terza soluzione. Non potrebbe darsi che la disposizione delle stelle nell'Universo sia di tipo particolarissimo? Non era forse lo stesso Newton a immaginare un'unica galassia perduta in un Oceano di vuoto? In tal caso, il numero delle stelle sarebbe finito, ed ecco eliminato il paradosso. Tuttavia, è difficile accettare una condizione così privilegiata per la Galassia. Come fa notare lo svedese Carl Charlier (1862-1934) alla fine del secolo XIX: certe ripartizioni gerarchiche[35] delle stelle nell'Universo, pur estendendosi all'infinito, imporrebbero una revisione al ribasso del calcolo della luminosità complessiva. Ma lo scioglimento del paradosso sembra richiedere una disposizione dei corpi celesti piuttosto inverosimile. Oggi i telescopi hanno rivelato davvero una sorta di organizzazione gerarchica della materia visibile nell'Universo, sotto forma di stelle, galassie, ammassi e superammassi; ma essa non corrisponde affatto a quella proposta da Charlier. Nel 1848 una soluzione radicalmente nuova viene escogitata dal grande scrittore americano Edgard Allan Poe. Nel suo poema in prosa *Eureka*, Poe spiega che il nero della notte si basa sulla finitezza del tempo passato: "Se la successione delle stelle fosse infinita, lo sfondo del cielo ci presenterebbe una luminosità uniforme come quella esposta dalla Galassia, poiché non vi sarebbe assolutamente neanche un punto in tutto questo sfondo in cui non esisterebbe una stella. L'unico modo per comprendere, in una tale condizione, i vuoti che il nostro telescopio individua in innumerevoli dire-

35. Charlier anticipa, in realtà, quella che nel linguaggio odierno chiameremmo distribuzione frattale. Vedi *questo volume* al paragrafo 2.8.6, pp. 107-110. [Charlier aveva proposto all'inizio del Novecento il cosiddetto *modello gerarchico dell'Universo*, in cui si ipotizza "che la materia nell'Universo sia raggruppata in unità sempre maggiori, sul modello delle bamboline russe o delle scatole cinesi. [...] Se l'Universo fosse perfettamente gerarchico, si potrebbe dire che ha una geometria frattale e che si estende all'infinito" (Voce: "Universo, modello gerarchico dell'", in J. Gribbin, *Enciclopedia dell'astronomia e della cosmologia*, cit., p. 590). NdC]

zioni, sarebbe quello di supporre che la distanza dello sfondo invisibile sia così immensa che mai nessun raggio abbia finora potuto giungere fino a noi".[36] L'autore dei *Racconti straordinari*, di fatto, ha intuito che osservare lontano nello spazio equivale a osservare il passato. Per esempio, supponiamo che le stelle esistano solo da un miliardo di anni. Poiché la luce si propaga alla velocità finita di 300.000 chilometri al secondo, essa può percorrere in un miliardo di anni solo la distanza di un miliardo di anni luce. Se una stella è più lontana di questo limite, la sua luce non ha ancora avuto il tempo di raggiungerci! Possiamo infatti ricevere la luce di un astro solo se questa ha avuto il tempo di arrivare fino a noi, cioè se l'astro che emette la luce è abbastanza vicino. Così, anche in uno spazio infinito e con una distribuzione illimitata delle stelle, il cielo non risplende in modo uniforme per il fatto che le stelle esistono solo da un tempo finito. Ecco la soluzione! (figura 1.7)

Poiché ha compreso quanto l'oscurità della notte sia ricca di insegnamenti circa la finitezza temporale del Mondo, Poe ci pare anticipare di vari decenni la cosmologia scientifica di oggi. Di rado, però, gli scienziati cercano ispirazione tra i poeti per elaborare le loro teorie, e la spiegazione di Poe resterà a lungo ignorata! La cosmologia relativistica, con i suoi modelli del Big Bang, differisce profondamente da quella dei secoli precedenti: offre almeno tre risposte possibili al paradosso, e ciascuna basta a togliere l'equivoco: (1) la finitezza dello spazio, concepita già da Keplero; (2) la finitezza del tempo, suggerita da Poe; (3) lo spostamento (o slittamento) cosmologico verso il rosso. Per quanto riguarda la finitezza dello spazio, la cosmologia relativistica ammette modelli di universo tanto finiti quanto infiniti; la novità è qui rappresentata dal fatto che gli spazi finiti come sono concepiti nella relatività (generale) eludono il paradosso del bordo.

Per quanto riguarda la finitezza del tempo passato, tutto porta a credere che l'Universo, in uno stato paragonabile a

36. E.A. Poe, *Eureka. Saggio sull'universo spirituale e materiale*, citato in bibliografia, p. 111.

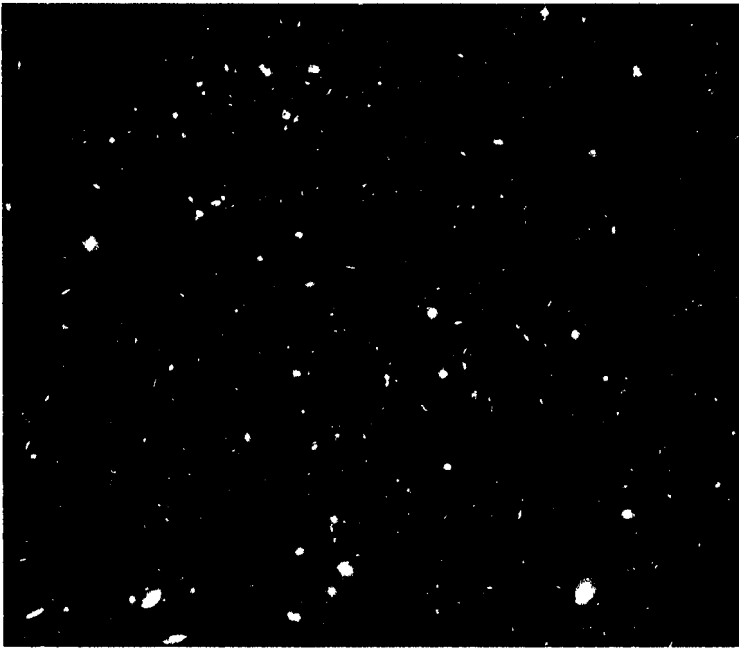



Figura 1.7 Il cielo notturno

Perché il cielo di notte è buio e non risplendente come un sole? Il motivo è che l'Universo è in espansione e l'espansione dura da un tempo finito. La distribuzione delle galassie lontane, disseminate nel cielo, forse ci indicherà se lo spazio è *finito* o *infinito*. Fonte: NASA, ESA, S. Beckwith (STScI) e HUDF Team.

quello odierno, esista da un tempo limitato, chiamato impropriamente età dell'Universo, che si avvicina a 14 miliardi di anni. Ciò implica immediatamente che nessuna stella abbia fatto la sua comparsa 14 miliardi di anni fa.

Sussiste dunque una frontiera spaziale al di là della quale noi non riceviamo luce. Non si tratta di una barriera fisica; non c'è nulla nello spazio che la segni. Piuttosto, noi siamo come i marinai in alto mare, che non possono scorgere nulla al di là dell'orizzonte. Ecco perché questo limite fittizio per le nostre osservazioni è chiamato "orizzonte cosmologico", e perché questo orizzonte fa nera la notte.

La cosmologia relativistica fornisce però anche una terza

spiegazione possibile che si basa sul fatto che l'Universo è in espansione. Questa dilatazione dello spazio modifica le leggi di propagazione della luce nell'Universo; l'effetto si traduce in uno spostamento nella frequenza, lo "spostamento verso il rosso della luce emessa dalle galassie" e in una diminuzione della sua energia. Noi riceviamo, certo, la radiazione di una stella lontana analoga al nostro Sole, e situata per esempio in una galassia piuttosto distante. Questa stella emette luce visibile, ma noi riceviamo da essa solo la radiazione cosiddetta *infrarossa*. Le lunghezze d'onda dell'ottica sono slittate verso questo dominio di minore energia. Ogni fotone emesso dalla stella ci perviene a un ritmo più lento, e con energia diminuita. Complessivamente, riceviamo dalla stella una potenza luminosa meno intensa e meno visibile. Fatti tutti i calcoli, non c'è niente di sorprendente nel fatto che lo sfondo del cielo non sfavilli di luce.

La cosmologia relativistica risolve, dunque, il paradosso del buio di notte senza contraddizione alcuna, mescolando insieme certamente le spiegazioni (2) e (3), e forse anche la (1). Così facendo, ci consente di capire come una constatazione apparentemente banale – di notte fa buio – sfoci sulle informazioni più profonde circa la struttura spaziale e temporale dell'Universo.

A dire il vero, i modelli del Big Bang hanno modificato da cima a fondo la problematica del buio di notte, a causa di un effetto che né Keplero, né Olbers, né i loro successori potevano mai sospettare: si constata che davvero lo sfondo del cielo è brillante anche di notte. Certo, non lo è tanto quanto la superficie del Sole, né alle stesse lunghezze d'onda. Stando ai modelli del Big Bang, l'intero Universo era talmente caldo circa 14 miliardi di anni fa che ciascuno dei suoi punti era tanto luminoso quanto la superficie del Sole. Ogni direzione che parta dal nostro occhio giunge a un punto dell'Universo passato. E, grazie a un ragionamento analogo a quello di Olbers, anche *in assenza di qualsiasi* stella, siamo circondati da questo enorme "oggetto" brillante che è l'Universo primordiale.

Non c'è qui un nuovo paradosso. Noi riceviamo davvero questa radiazione, ma essa è spostata verso le grandi lunghezze d'onda, e dunque attenuata. Circa 14 miliardi di anni fa l'Uni-

verso era un immenso oggetto splendente, che emetteva in tutte le direzioni radiazioni a lunghezze d'onda visibili. Ma questa radiazione ha subito uno slittamento verso il rosso della stessa natura di quello delle galassie. Poiché è molto antico, è anche molto intenso: di un fattore superiore a 1000, ha trasformato la luce visibile in microonde. Questa radiazione elettromagnetica fossile, traccia dell'epoca dei primordi, è stata scoperta per la prima volta nel 1964. Oggi è abbondantemente osservata, ed è nota come "radiazione cosmologica di fondo".

L'oscurità e la freschezza della notte ci insegnano, dunque, che l'Universo (in espansione, quasi certamente di età finita) differisce profondamente da quello che era alcuni miliardi di anni fa. In un modo o nell'altro, il Cosmo *evolve*.

1.15 Allora, finito o infinito?

La questione della finitezza o dell'infinitezza dello spazio è un problema del tutto ben posto nel quadro delle soluzioni di Fridman e Lemaître. Questi modelli trascurano le irregolarità della distribuzione della materia (stelle, galassie...), non diversamente da come il geografo trascura, in prima istanza, le irregolarità della superficie terrestre (montagne, vallate...). L'Universo ha dappertutto le stesse proprietà; diciamo allora che lo spazio è "omogeneo e isotropo". Si caratterizza solo per due tipi di proprietà: la sua curvatura (costante nello spazio, ma di cui restano da precisare il segno e l'intensità) e la sua topologia. Tuttavia, da tempo i cosmologi hanno lasciato da parte la topologia, assumendo che fosse la più semplice possibile, e interessandosi così solo alla curvatura. Più avanti ritorneremo sul ruolo cruciale di questa semplificazione a proposito del problema dell'infinito spaziale.

Per quanto concerne la curvatura, nei modelli di Fridman-Lemaître, sono possibili tre famiglie di spazi (figura 1.8): gli spazi *euclidei* sono a curvatura nulla, e ne conosciamo bene le proprietà; gli spazi *sferici* sono a curvatura positiva e gli spazi lobačevskiani (detti anche *iperbolici*) sono a curvatura negati-

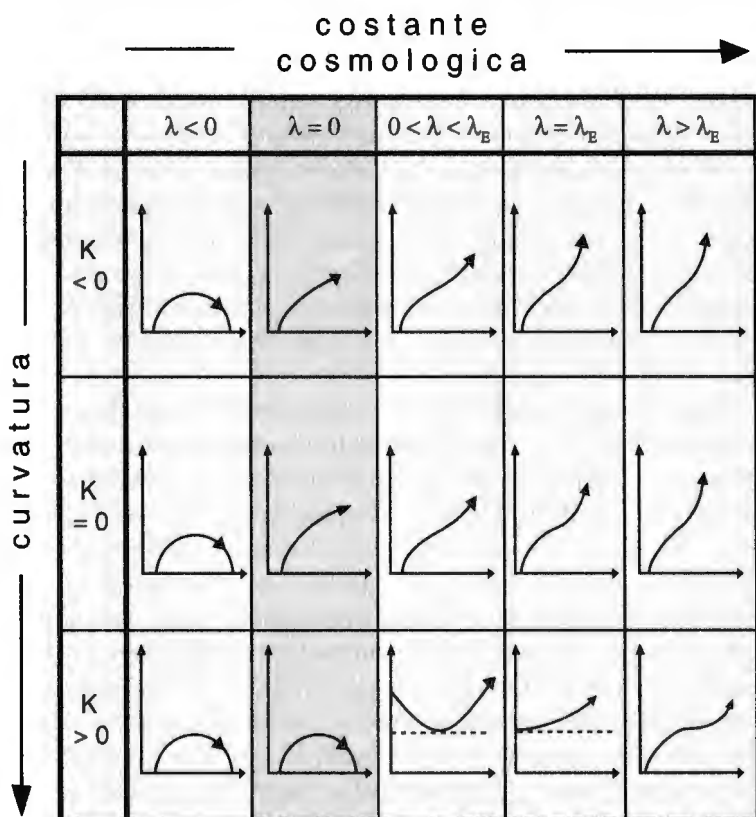



Figura 1.8 Gli universi di Fridman-Lemaître

La dinamica dei modelli cosmologici di Fridman-Lemaître, ossia la variazione del fattore di scala spaziale in funzione del tempo cosmico, è determinata dal segno (k) della curvatura delle sezioni spaziali e dal valore della costante cosmologica λ. Due valori particolari di quest'ultima sono $\lambda = 0$ e $\lambda = \lambda_E$, dove λ_E è il valore indicato da Einstein nel 1917 per assicurare il carattere statico del suo universo ipersferico. Poiché una costante cosmologica positiva equivale a un'azione repulsiva a grande distanza, tutti i modelli che hanno un'elevata costante cosmologica ($\lambda > \lambda_E$) sono "aperti" nel tempo, vale a dire in espansione perpetua, indipendentemente dalla loro curvatura. Al contrario, una costante negativa $\lambda < 0$ contribuirebbe ad aumentare l'effettiva gravità, di modo che i modelli corrispondenti finirebbero tutti per collassare su se stessi. In alcuni casi ($K > 0$ e $0 < \lambda \leq \lambda_E$) la singolarità iniziale può anche scomparire. Non tutte le soluzioni di Fridman-Lemaître sono, dunque, modelli a Big Bang.

va. Uno spazio sferico è di estensione finita, come è il caso di un cerchio in dimensione 1, o di una superficie sferica in dimensione 2. È la ragione essenziale per cui i pionieri della cosmologia relativistica – Einstein, de Sitter, Fridman e Lemaître – avevano, di primo acchito, scelto questa famiglia. Per le due altre famiglie, la famiglia euclidea e quella iperbolica, il carattere finito o infinito dello spazio dipende dalla topologia (§ 1.17). Nelle topologie più semplici, dette *monoconnesse*, questi spazi sono infiniti. Quindi, se si prescinde dalle sottigliezze topologiche, il dilemma finito/infinito si riduce a riconoscere la curvatura dello spazio.

La relatività generale indica come calcolare questa curvatura. Il suo valore è determinato dal contenuto materiale ed energetico dell'Universo, essenzialmente la densità media di materia e di energia che esso contiene, come pure da una costante λ, detta costante cosmologica. Questo fattore (talvolta interpretato come un'energia addizionale) possiede un'influenza gravitazionale repulsiva, che, a grande scala, si oppone alla gravitazione attrattiva della materia ordinaria. Senza effetto nei fenomeni locali (per esempio, il Sistema solare o la nostra Galassia) modifica la geometria e la dinamica dell'Universo nella sua globalità. Pienamente giustificata sul piano del formalismo matematico, la costante cosmologica ha uno statuto fisico ambiguo: allo stato attuale ci asteniamo dalle interpretazioni (alcuni teorici la considerano come una manifestazione dell'energia del vuoto quantistico,[37] vedi § 3.7).

Fino agli ultimi decenni, in larga maggioranza i cosmologi si limitavano a supporre che questa costante fosse zero. Questa seconda semplificazione (dopo quella relativa alla topologia) associa il carattere finito/infinito dello spazio alla sola densità media della materia: a seconda che questa densità superi o no un certo "valore critico" calcolato a 10^{-29} g/cm^3 (a meno di un fattore che dipende dal tasso di espansione attuale dell'Universo), la curvatura dello spazio è positiva o negativa, e lo spazio è finito o infinito. Per ragioni di comodo, i cosmo-

37. Vedi M. Lachièze-Rey, *Les avatars du vide*, citato in bibliografia.

logi definiscono un *parametro di densità* Ω come il rapporto tra la densità reale (tutte le forme di materia e di energia messe insieme) e il valore critico. La curvatura è dunque negativa, nulla o positiva a seconda che questo rapporto sia minore di, eguale a, o maggiore di 1. Questo legame tra curvatura e densità fornisce un accesso osservativo alla geometria macroscopica dello spazio.

L'evoluzione temporale dell'Universo può venir declinata secondo due scenari. Nel primo, l'espansione rallenta fortemente, dilata lo spazio fino a un volume massimo, poi cede a un movimento inverso di contrazione e di riscaldamento che si conclude in un'ultima vampa dell'Universo: il "Big Crunch". Nel secondo scenario, l'espansione attuale non si arresta; sicché essa, senza interruzione, diluisce e raffredda l'Universo. Queste possibilità teoriche dipendono dalla densità media di materia e dalla costante cosmologica.

Varie osservazioni astronomiche mostrano che la densità media di materia direttamente visibile non supera il centesimo del valore critico. Ma noi vediamo solo una parte della materia cosmica, e differenti ragioni ci fanno ipotizzare l'esistenza di grandi quantità di materia invisibile, *oscura*: buchi neri, piccole stelle subluminose, troppo poco massive per accendere reazioni nucleari, vaste nubi di gas interstellare formate di idrogeno freddo, particelle massive prodotte dall'istante del Big Bang, ecc. Ne ritroviamo le tracce indirette non grazie alla sua radiazione elettromagnetica, ma agli effetti gravitazionali che tale materia oscura produce sui movimenti delle stelle e delle galassie visibili.

Fino al 1996 gli inventari della densità di materia dell'Universo, visibile e invisibile, convergevano tra 0,1 e 0,3 (in unità di valore critico). Assumendo *a priori* che la costante cosmologica fosse zero, numerosi cosmologi finivano allora col privilegiare uno spazio a curvatura negativa, in espansione perpetua, e di taglia infinita. Nuovi risultati osservativi hanno, però, modificato la situazione. Osservazioni di supernovae (stelle che esplodono) in galassie lontane, combinate all'analisi di certe caratteristiche fini della radiazione fossile (vedi oltre, § 1.18),

hanno consentito di fissare il parametro di densità attorno al valore 0,3; soprattutto, hanno permesso di ricavare un valore della costante cosmologica (antigravitante) vicino a 0, 7 (nelle stesse unità). Lo spazio sarebbe allora di curvatura debolissima, e in espansione perpetua e accelerata.

La questione del carattere finito/infinito dello spazio resta dunque aperta. Se risultati futuri indicheranno una curvatura spaziale strettamente positiva, la bilancia inclinerà definitivamente a favore della finitezza. Se, invece, indicheranno una curvatura negativa o nulla, saranno solo delle considerazioni topologiche quelle che consentiranno di decidere della finitezza o della infinitezza dello spazio.

1.16 Il paradosso della duplicazione degli esseri

Alcuni ritengono che l'infinito cosmico comporti un altro paradosso, la cui origine risale alla dottrina dell'atomismo di due millenni e mezzo fa: la pluralità infinita dei mondi e degli esseri. Uno spazio infinito e omogeneo permette l'esistenza di un numero infinito di galassie, di stelle, di pianeti. Orbene, non pochi astronomi pretendono di poter stimare le probabilità di comparsa e di evoluzione della vita su un qualche pianeta della nostra Galassia o di qualche altra simile alla nostra. Ma qui la nozione di probabilità viene utilizzata in modo illegittimo, fuori dal suo quadro operativo. Resta il fatto che tutto questo ci conduce a immaginare che la vita abbia potuto davvero apparire altrove, magari una vita simile a quella comparsa sulla nostra Terra.

Del resto, lo schema di organizzazione della vita terrestre è retto dalle molecole di DNA. Queste ultime, di taglia limitata, possono presentarsi in un numero finito (anche se grandissimo) di configurazioni possibili. Se i pianeti sono in un numero infinito, ci si potrebbe aspettare l'esistenza, almeno su uno di questi, di un altro Jean-Pierre Luminet, di un altro Marc Lachièze-Rey, dalle strutture genetiche strettamente identiche a quelle degli autori di *questo volume*, con tutti i neuroni esatta-

mente nello stesso stato, cioè con tutti i ricordi, tutti i pensieri, tutti i gesti del momento! E perché non un'infinità di noi due? Potrebbe anche esistere un numero infinito di lettori di *questo volume* – che bel problema coi diritti d'autore!

Tutte queste considerazioni (o delle riflessioni del medesimo tipo) spingono certuni a considerare l'infinità dello spazio come una fonte di paradossi filosoficamente inaccettabili, o come una rimessa in discussione di nozioni come quella di identità, quella di libertà, ecc. In realtà, questi "ragionamenti" finiscono col lasciarci scettici. Se nessuno può (e non potrà mai) dimostrare l'impossibilità di tali idee, è nondimeno inconcepibile associarvi delle probabilità. Si tratta di situazioni che non possono minimamente venir considerate come conseguenze dell'infinità dello spazio. Per esempio, dal fatto che una collezione infinita di oggetti è possibile, non segue affatto che essa sia davvero realizzata.

L'eternità attraverso gli astri

È un agitatore politico, Louis-Auguste Blanqui, che ha formulato nel modo più incisivo il paradosso della duplicazione degli esseri in uno spazio infinito. Blanqui trascorse più di trent'anni detenuto in questo o in quel carcere, ed è nel corso di una delle sue prigionie che redasse, nel 1871, un opuscolo dal titolo *L'éternité par les astres: hypothèse astronomique* (*L'eternità attraverso gli astri: ipotesi astronomica*). Qui espone le meditazioni filosofiche che gli vengono ispirate dall'ipotesi dell'infinità dell'Universo. Comincia con l'affermare la limitazione delle combinazioni differenziate della materia: c'è solo un centinaio di corpi semplici, o atomi, a partire dai quali è costituito qualsiasi sistema materiale. Malgrado il numero incalcolabile delle loro combinazioni, il risultato è necessariamente finito, come è finito il numero degli elementi stessi. Ne consegue che, per "riempire l'estensione", la natura deve ripetere all'infinito ciascuna delle sue combinazioni originarie. Blanqui ne trae implacabilmente le conseguenze logiche: "Suddividiamo così i corpi celesti in *originali* e *copie*. Gli *originali* sono costituiti da tutti i raggruppamenti di globi che formano un *tipo speciale*. Le *copie* sono le

ripetizioni, *esemplari* o *bozze* di questo tipo. La quantità di *tipi originali* è limitata, quella delle *copie* o ripetizioni, è infinita. Sono loro a costituire l'infinito. Ogni tipo ha dietro di sé un esercito di sosia senza limite. [...] Di conseguenza ogni terra, che contenga una di queste collettività umane *particolari*, risultato di incessanti modificazioni, deve ripetersi miliardi di volte per far fronte alle necessità dell'infinito. Quindi esistono miliardi di terre sosia perfette nelle cose e nelle persone, dove non varia, nel tempo e nello spazio, né di un millesimo di secondo, né di un capello, neppure un filo d'erba. [...] Così, grazie al suo pianeta, ogni uomo possiede nello spazio un numero infinito di doppioni che vivono la sua stessa identica vita. È infinito ed eterno anche lui, incarnato in altri se stesso non solo nella sua età attuale, ma in tutte le *sue* età. Ha, simultaneamente, in ogni secondo che viviamo, miliardi di sosia che nascono, altri che muoiono, e altri ancora la cui età copre la distanza dalla nascita alla morte, secondo per secondo".[38]
Invocando l'infinità dello spazio e l'eternità del tempo – entrambe implicate dalla cosmologia newtoniana –, Blanqui sostiene dunque che l'eternità rimette in gioco imperturbabilmente, all'infinito, le stesse rappresentazioni. Queste riedizioni monotone di miriadi di terre tutte uguali e il carattere vano di qualsiasi pretesa novità ci paiono ancor più bizzarri per il fatto che sono stati formulati da una persona che voleva modificare il corso della storia.

1.17 La topologia dell'Universo

La cosmologia relativistica "standard" non ci fornisce una descrizione completa dello spazio a grande scala. È finito o infinito, orientato o non orientato, ha forse dei "buchi" o dei "manici"? La gravitazione da sola non decide tali questioni. La forma dipende anche dalla *topologia cosmica*.

La topologia – letteralmente la parola vuol dire scienza dei luoghi – è una branca della geometria che classifica gli spazi. I modelli cosmologici standard assumono implicitamente che

38. L.-A. Blanqui, *L'eternità attraverso gli astri*, citato in bibliografia, pp. 74, 85, 88. [NdC]

lo spazio possegga le proprietà topologiche più semplici possibili, cioè che esso sia *monoconnesso* (o, come altri dice, *semplicemente connesso*). Gli spazi vengono classificati in tre grandi famiglie, stando alla loro curvatura – negativa, nulla o positiva. Ciascuna famiglia viene ulteriormente divisa in "classi topologiche". Per definizione, gli spazi di una stessa classe (topologica) possono essere deformati in modo continuo gli uni negli altri, senza tagli o lacerazioni. Per esempio, in dimensione 2 la superficie di una sfera ha la stessa topologia (appartiene alla stessa classe) di qualsiasi superficie chiusa ovoide; ma il piano è di una topologia differente, poiché nessuna deformazione continua può dargli la forma di una sfera.

Per meglio visualizzare che cosa è la topologia, pensiamo all'ordinario piano euclideo: un foglio infinito a 2 dimensioni (che abitualmente immaginiamo immerso nello spazio a 3 dimensioni). Ritagliamo una banda di "lunghezza" infinita nella direzione y, ma di larghezza finita L nella direzione ortogonale x. Poi identifichiamo (incolliamo) i due bordi infiniti di questa banda: otteniamo un cilindro (figura 1.9). Orbene, la geometria di Euclide vale tanto nella superficie cilindrica quanto nel piano originario. Il cilindro è dunque una superficie euclidea, cioè a curvatura nulla. Differisce, tuttavia, in modo fondamentale dal piano, è finito nella direzione x. Questo tipo di proprietà dipende dalla topologia, non dalla curvatura. Tagliando il piano e incollandolo in certi punti, non abbiamo cambiato la sua forma locale (la sua curvatura), ma abbiamo cambiato radicalmente la sua forma globale (la sua topologia).

Spingiamoci oltre. Tagliamo il cilindro in un tubo di lunghezza finita, poi incolliamo le due estremità circolari. Otteniamo il cosiddetto "toro piatto" (ancora figura 1.9): una superficie euclidea senza curvatura, ma finita in tutte le direzioni. Un batterio che vivesse sulla superficie di un toro piatto non si accorgerebbe della differenza col piano ordinario, a meno che non si spostasse, facendo un giro completo del toro.

Un semplice foglio di carta permette così di costruire tre superfici con topologie differenti, anche se appartengono alla stessa famiglia di curvatura nulla (e non sono le sole!). Come

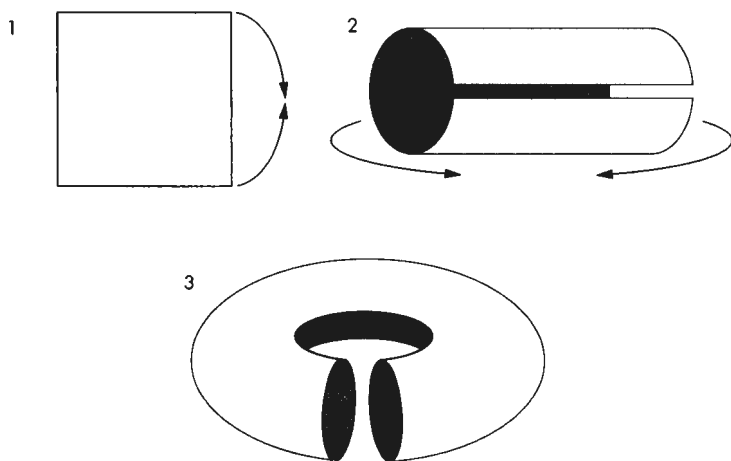



Figura 1.9 Topologia del cilindro e del toro

Se si ritaglia un rettangolo (1) in un piano, e si incollano due bordi opposti si ottiene un cilindro (2). Se si incollano gli altri due bordi (come indicano le frecce), si ottiene una superficie chiusa detta *toro*. Questa superficie è finita e non ha bordo. Analogamente, si possono immaginare spazi finiti e senza bordo, costruiti a partire dal nostro abituale spazio euclideo.

abbiamo visto, i tre tipi di curvatura generano tre famiglie di superficie:

– la prima è quella delle superficie di tipo euclideo senza curvatura, ovvero a curvatura nulla: il piano, il cilindro e il toro che abbiamo appena costruito, ma anche il *nastro di Möbius* e la *bottiglia di Klein* (o come altri dice *otre di Klein*);[39]

– la seconda famiglia è di tipo sferico, a curvatura positiva come la superficie di un pallone; ne esistono solo due forme: la sfera propriamente detta e il "piano proiettivo" (visualizzarlo è diabolico!);

– la terza è di tipo iperbolico, a curvatura negativa, come certe parti di una sella per cavallo: i tipi di superficie iperboliche sono in numero infinito. Per esempio, basta praticare dei "bu-

39. Per queste due superficie vedi J.-P. Luminet, *La segreta geometria del cosmo*, cit., p. 358. [NdC]

chi" in una superficie, o attaccarvi delle "anse" (o manici) per generare nuove forme iperboliche! Per dare qualche illustrazione: la superficie di una focaccia, o quella di un *bretzel* nei paesi nordici è iperbolica. L'artista olandese M.C. Escher ha trascorso parte notevole della sua esistenza a rappresentare queste superficie bizzarre in incisioni strane e svianti (figura 1.10).

Operazioni dello stesso tipo possono essere applicate all'intero *spazio*. Una volta che hanno affrontato la classificazio-

Figura 1.10 Un'incisione di Escher

Gli angeli e i demoni di Maurits Cornelis Escher (1898-1972) prendono vita nel piano iperbolico di Lobačevskij, oggetto geometrico dotato di proprietà molto interessanti. La rappresentazione della figura ricorda, grazie a un effetto di proiezione, l'infinito dello spazio sulla circonferenza di un cerchio, e la prospettiva rende così le figure ripetute sempre più piccole.

ne degli spazi a tre dimensioni, i matematici hanno scoperto forme affascinanti. Fin troppo spesso queste rappresentano il loro terreno di caccia privato; e tuttavia possono essere applicate alla descrizione dell'Universo reale. Come le superficie, anche gli spazi sono classificati in tre famiglie: sferico, euclideo e iperbolico (a seconda del segno della loro curvatura, positiva, nulla e negativa).[40] Si dimostra, per esempio, che la famiglia euclidea (curvatura nulla) comporta diciotto tipi di topologie distinte: il più semplice è lo spazio euclideo "ordinario", infinito, quello di cui si studiano le proprietà a scuola, ma dieci altri spazi euclidei sono perfettamente finiti!

Per esempio l'*ipertoro*, che generalizza a tre dimensioni il caso del toro, può essere concepito come l'interno di un cubo ordinario di cui le facce opposte, a due a due, siano state identificate. Uscendo dall'una, si rientra immediatamente in quella che le è opposta. In un certo senso, è il mondo di moltissimi videogiochi. Uno spazio del genere è finito, anche se senza curvatura e senza bordo.

La famiglia a curvatura negativa ammette un'infinità di tipi di spazi, alcuni chiusi (finiti), altri aperti (infiniti). L'interesse principale per la cosmologia viene dal fatto che lo spazio può così essere finito anche se la sua curvatura è negativa o nulla, e dunque anche se la densità di materia e la costante cosmologica sono debolissime.

Infine, alla famiglia a curvatura positiva appartiene ugualmente un'infinità di spazi: tra queste varianti topologiche dell'ipersfera monoconnessa, ci sono gli spazi "lenticolari", gli spazi "prismatici" e gli spazi "poliedrici"... tutti sono finiti e senza bordo.[41]

I modelli "standard" di Fridman-Lemaître presuppongono

40. Sfortunatamente, non possediamo la capacità di visualizzare questa curvatura. Di fatto, ci rendiamo conto della curvatura delle superficie dall'esterno, visualizzandole in uno spazio a tre dimensioni. Ma è impossibile visualizzare gli spazi curvi in un più generale spazio a quattro dimensioni. Dobbiamo accontentarci delle definizioni matematiche, a condizione che esse siano sempre precise e operative.

41. Per maggiori dettagli, J.-P. Luminet, *La segreta geometria del cosmo*, cit., interamente dedicato alla topologia cosmica.

la topologia spaziale monoconnessa, ma nulla ci garantisce che essa sia anche semplice. La relatività generale impone solamente, attraverso le equazioni di Einstein, le proprietà *locali* della geometria, cioè la curvatura. Ciò autorizza a costruire soluzioni cosmologiche tanto finite, quanto infinite – indipendentemente dalla loro curvatura, spesso descritte da forme di grande sottigliezza.

Un poliedro è una figura costruita assemblando facce poligonali: i lati comuni ne formano gli spigoli, i punti comuni i vertici. Il più delle volte, uno spazio tridimensionale non monoconnesso è rappresentabile sotto forma di un poliedro convesso di cui sono identificate convenientemente le facce a due a due. Per esempio, si può costruire uno spazio iperbolico chiuso a partire da un dodecaedro, le cui facce sono state identificate a due a due, utilizzando trasformazioni iperboliche. Lo spazio interno al poliedro è a curvatura negativa in ciascuno dei suoi punti; tuttavia, proprio come nel caso dell'ipertoro euclideo, il suo volume è finito e "nessuna retta" se ne allontana indefinitamente. Così, ci si deve liberare da una falsa opinione, che purtroppo è abitualmente ripetuta nei manuali di cosmologia relativistica. Per sapere se lo spazio è finito o infinito, non basta stimare il parametro di densità, ma sono necessarie delle ipotesi supplementari, appunto quelle della topologia.

Due padri della topologia cosmica

Nell'era della cosmologia prerelativistica, già l'astronomo tedesco Karl Schwarzschild aveva dato prova di un'intuizione topologica sorprendente nel *Post scriptum* del suo articolo del 1900 che abbiamo menzionato nel § 1.11: "Immaginate che dopo una serie di osservazioni astronomiche estremamente fini, l'intero Universo ci appaia costituito da una moltitudine di copie conformi della nostra Via Lattea, che lo spazio si riveli suddiviso in cubi contenenti ciascuno una copia esattamente identica alla Via Lattea. Potremmo mai davvero credere che uno stesso mondo si ripeta indefinitamente? Per renderci conto del-

l'assurdità di questa idea ci basti pensare che, in tali condizioni, noi stessi, in quanto soggetti osservatori, esisteremmo in un numero infinito di esemplari identici. Sarebbe molto più rassicurante pensare che le ripetizioni sono illusorie, che in realtà lo spazio possiede proprietà di connessione particolari, tali che, se si esce da un lato di uno qualunque di questi cubi, vi si rientra immediatamente dal lato opposto".[42] Questa descrizione è quella di uno spazio ipertorico; ci suggerisce che le nebulose spirali (che all'epoca dell'articolo non sono state ancora identificate come galassie indipendenti, esterne alla nostra) non siano altro che immagini fantasma della nostra Via Lattea, a causa di una particolare struttura topologica dello spazio. Schwarzschild faceva parte della minoranza di quegli astronomi visionari dotati di cultura matematica approfondita. A partire dal lavoro seminale di Riemann, i matematici ottocenteschi avevano cominciato a trovare esempi di spazi di volume finito, ma senza frontiera. Tra di essi vi era l'ipertoro, costituito da un solo blocco parallelepipedico di spazio euclideo riconnesso su se stesso, in modo che tutto ciò che passa per una faccia ricompare in un punto della faccia opposta. Ma agli occhi di quasi tutti, questo spazio chiuso era una pura astrazione, senza rapporto alcuno con lo spazio fisico. Nel 1924 Alexandr Fridman rinnova la questione della topologia nel quadro della relatività generale. Individua con chiarezza i limiti di base della teoria cosmologica costruita sulla teoria di Einstein: "In assenza di ipotesi addizionali, le equazioni di universo di Einstein non permettono di decidere la questione della finitezza del nostro Universo", scrive. Si dedica a mostrare come lo spazio possa diventare infinito se si identificano dei punti tra di loro, ciò che, per usare i termini della topologia, rende lo spazio multiconnesso. Intravvede anche come questa possibilità consenta l'esistenza di "fantasmi", diverse immagini di uno stesso punto reale. "Uno spazio à curvatura positiva è sempre finito", aggiunge. Ma le conoscenze matematiche non ci permettono di "risolvere la questione della finitezza per uno spazio a curvatura negativa".[43]

42. Vedi J.-P. Luminet, *La segreta geometria del cosmo*, cit., p. 371.
43. Per questi contributi di Fridman si rimanda a Fridman, A., Lemaître, G., *Essais de cosmologie*, citato in bibliografia, e a J.-P. Luminet, *L'invenzione del Big Bang*, citato in bibliografia, pp. 15-20, 41-79, 174-175, 181, 211-215, 223-225, 241. [NdC]

1.18 L'illusione dell'infinito

In uno spazio monoconnesso, come lo spazio euclideo, due punti distinti qualsiasi sono congiunti da una sola geodetica (l'equivalente in uno spazio curvo di una retta). Al contrario, in uno spazio multiconnesso, come l'ipertoro, sono infinite le geodetiche che congiungono i due punti. Questa proprietà conferisce loro un interesse eccezionale in cosmologia, perché qui i raggi luminosi seguono certe geodetiche dello spazio-tempo.

Quando si osserva una galassia lontana, siamo abitualmente portati a credere che ne sia visibile un'unica immagine, in una direzione data e a una distanza data. Orbene, nello spazio cosmico multiconnesso, la moltiplicazione dei tragitti luminosi ne dà immagini multiple. Saremmo così immersi in una vasta illusione ottica che ci fa apparire l'Universo più vasto di quanto è. Noi prenderemmo per immagini "originali" di lontane galassie quelle che, in realtà, sarebbero copie fantasma di una stessa galassia. Per esempio, in un ipertoro che abbia per raggio qualche miliardo di anni luce, i raggi luminosi avrebbero avuto il tempo di fare più volte, dopo il Big Bang, il giro dell'Universo. Lo spazio ci sembrerebbe vasto, "dispiegato", riempito di miliardi di galassie, mentre sarebbe, in realtà, più piccolo, "ripiegato", contenente solo un numero più piccolo di oggetti autentici. Dove sarebbe l'illusione? Dove sarebbe la realtà? Un semplicissimo Universo a due dimensioni illustra come un osservatore situato nella galassia A può vedere delle immagini multiple della galassia B. Questo modello di Universo, noto appunto come *toro*, viene costruito a partire da un quadrato di cui si sono "incollati" i bordi opposti: tutto quello che esce da un lato ricompare immediatamente sul lato opposto, al punto corrispondente. La luce della galassia B può raggiungere la galassia A seguendo diversi tragitti, in modo che l'osservatore della galassia A veda l'immagine della galassia B giungergli da svariate direzioni. Benché lo spazio del toro sia finito, un essere che in esso vivesse avrebbe l'illusione di vedere uno spazio, se non infinito (in pratica, degli orizzonti

limitano la vista), almeno più grande di quanto sia in realtà. Questo spazio fittizio ha l'aspetto di un reticolo costruito a partire da una cellula di base, che ripete indefinitamente ciascuno degli oggetti della cellula. Un modello siffatto è talvolta chiamato "piccolo Universo", o "Universo *chiffonné*" (o "spiegazzato").[44] Se corrispondesse alla realtà, l'Universo *apparente* sarebbe piuttosto differente dall'Universo *fisico*. Percepiremmo un immenso cristallo cosmico che si dispiega in tutte le direzioni, a partire da una cellula poliedrica di base. Solo la cellula di base sarebbe "reale", corrisponderebbe cioè allo spazio fisico. Ogni galassia originale, appartenente a questa cellula, produrrebbe un gran numero di immagini fantasma nel cristallo cosmico, immagine della galassia originaria, ma vista in direzioni differenti e in epoche diverse della sua storia: un miraggio topologico (figura 1.11). Pensiamo a una stanza tappezzata interamente di specchi sulle sue sei pareti (pavimento e soffitto compresi): se vi entriamo, il gioco delle multiple riflessioni ci dà immediatamente l'impressione dell'infinito in tutte le direzioni, come se fossimo sospesi su un pozzo senza fondo, pronti a essere inghiottiti in una direzione o in un'altra. Uno spazio cosmico multiconnesso, in apparenza gigantesco, potrebbe cullarci in un'illusione analoga. Un miraggio topologico potrebbe, dunque, moltiplicare le immagini delle sorgenti luminose. Effetti dello stesso genere sono già noti agli astronomi: si tratta dei "miraggi gravitazionali".[45] In quest'ultimo caso è la curvatura dello spazio, in prossimità di un corpo massivo, che moltiplica i tragitti dei raggi luminosi che provengono da un oggetto più lontano. Percepiamo allora immagini fantasma, raggruppate nella direzione del corpo intermediario che viene usualmente chiamato "lente". Un miraggio di questo tipo è dovuto alla curvatura locale dello spazio intorno alla lente. Nel caso topologico, non è un corpo particolare, ma lo spazio stesso che svolge il ruolo di lente,

44. Ci si è adeguati alla traduzione di *chiffonné* adottata da C. Sinigaglia per J.-P. Luminet, *La segreta geometria del cosmo*, cit. [NdC]

45. Vedi l'inserto a colori, tavola XII. [NdC]

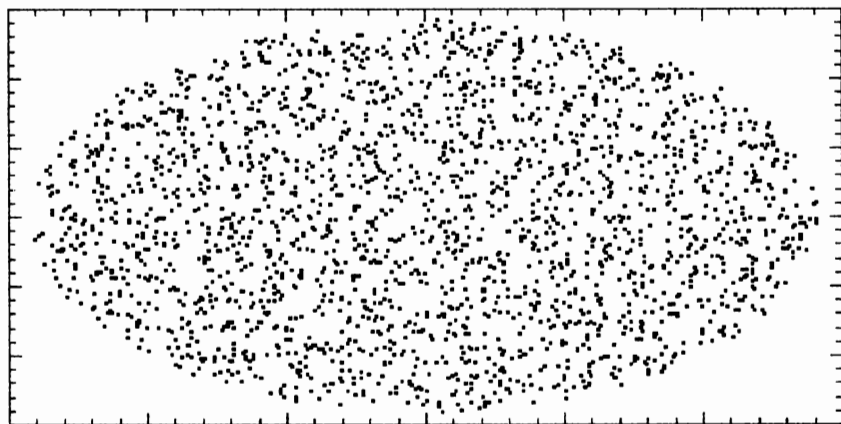
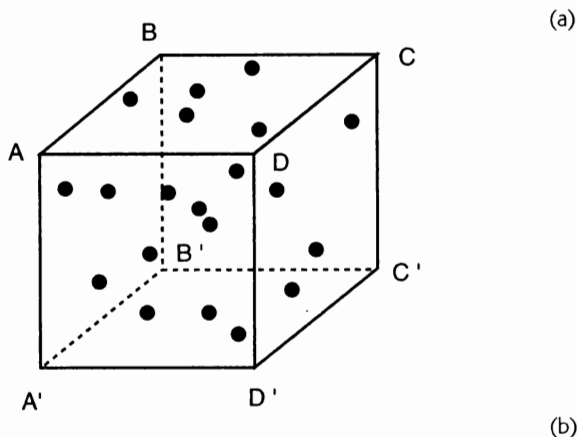



Figura 1.11 Gioco cosmico di specchi

Può darsi che la topologia dell'Universo sia "multiconnessa", anche se la maggior parte dei modelli cosmologici assumono che sia "monoconnessa". Tale "multiconnessità" creerebbe nell'Universo dei cammini supplementari per i fotoni che ci consentono di vedere la galassie lontane. Ne risulterebbe un certo numero di "immagini fantasma" di queste galassie.
(a) Lo spazio è qui un ipertoro, rappresentato dall'interno di un cubo di 5 miliardi di anni luce di lato, le cui facce opposte sono identiche. Venti galassie sono distribuite a caso nello spazio.
(b) Simulazione numerica dell'apparenza del cielo tenendo conto dell'effetto di miraggio topologico. Ciascuna galassia reale genera una cinquantina di immagini fantasma ripartite sull'intera volta celeste. Tra le centinaia di immagini visibili è impossibile distinguere le immagini reali da quelle fantasma.

deforma la geometria, e invia le immagini fantasma in tutte le direzioni dello spazio e in tutte le sezioni del passato. Questo miraggio *globale* ci consentirebbe di vedere gli oggetti, non solamente sotto tutti i loro possibili orientamenti, ma pure in tutte le fasi della loro evoluzione. Se lo spazio è multiconnesso, può esserlo solo in modo sottile e a grandissima scala; altrimenti, avremmo già identificato delle immagini fantasma della nostra Galassia o di altre strutture conosciute. Come saperlo? Come svelare la topologia dell'Universo? Diverse équipe in tutto il mondo hanno sviluppato metodi sperimentali per controllare empiricamente l'ipotesi dell'Universo *chiffonné*.

Sono state proposte, sostanzialmente, due famiglie di controlli osservativi – entrambe basate sull'effetto di miraggio topologico. La prima esamina le fonti luminose *localizzate*, ripartite nello spazio e nel tempo, come le galassie, i quasar e gli ammassi di galassie; la seconda analizza la radiazione fossile la cui emissione mediante plasma caldo dell'Universo primordiale si è svolta in un'epoca unica del passato. La sua fonte ci apparirebbe dunque situata a una distanza unica. Ciascuna di queste due famiglie di controlli empirici ammette, a sua volta, due varianti: una prima cerca di riconoscere *individualmente* immagini multiple di uno stesso oggetto (galassia, ammasso, regione del plasma emettitore per la radiazione diffusa); la seconda, più potente, tralascia il riconoscimento individuale e si basa sull'analisi *statistica* delle posizioni delle fonti di radiazione. La cristallografia cosmica cerca, per esempio, di identificare certe ripetizioni nella distribuzione tridimensionale delle sorgenti. Per la radiazione cosmologica di fondo il metodo delle "coppie di cerchi" consentirebbe di mettere in evidenza correlazioni proprie di uno spazio multiconnesso. In breve, si tratta di coppie di cerchi lungo i quali la temperatura cosmica dovrebbe distribuirsi in modo identico...[46]

Nel 2001 il satellite astronomico WMAP (acronimo di *Wilkin-*

46. Per il metodo delle "coppie di cerchi" vedi J.-P. Luminet, *La segreta geometria del cosmo*, cit., pp. 134, 161-162, 327. [NdC]

son Microwave Anisotropy Probe)[47] ha cominciato a scrutare nel dettaglio la struttura della radiazione fossile, sondando in questo modo il passato più remoto dell'Universo (figura 1.12). A partire dalle minuscole fluttuazioni di temperatura di questa radiazione che sono state via via scoperte, i ricercatori traggono le più svariate informazioni sull'Universo. Nel febbraio 2003 la pubblicazione dei primi risultati di WMAP ha indicato una curvatura spaziale debolissima (la somma del parametro di densità e della costante cosmologica è compresa tra 1 e 1,04). Ma un'altra misura di WMAP sferra un brutto colpo al modello di spazio euclideo infinito. Le fluttuazioni della radiazione fossile sarebbero dovute alle vibrazioni acustiche che hanno attraversato il plasma primordiale. La loro osservazione ci consente di ricomporre la musica degli inizi dell'Universo. Orbene, i dati mostrano un deficit di vibrazioni alle maggiori lunghezze d'onda, rispetto a quello che predice la teoria dell'Universo infinito. Come se mancassero all'appello le note più gravi del Cosmo. Quale ne è la ragione? Forse, l'Universo non è abbastanza vasto per "suonarle", non diversamente da una corda di chitarra che non può emettere suono più grave di quello consentito dalla sua lunghezza e dal suo diametro!

Questo deficit ha così condotto uno degli autori di *questo libro* e i suoi collaboratori[48] a proporre una topologia piuttosto curiosa, il cosiddetto "spazio sferico dodecaedrico di Poincaré". Immaginiamo l'interno di un dodecaedro, poliedro regolare formato da dodici facce pentagonali, e supponiamo che se si esce da una parete pentagonale si rientri dalla faccia opposta, con un giro di 36°.[49] Si tratta di uno spazio finito, ma senza bordi e senza limiti. Ci darebbe la sensazione di vivere in uno spazio ben più vasto, pavimentato da dodecaedri demoltiplicati – una sorta di palazzo dei ghiacci. Ogni ritorno di raggi luminosi che attraversano le pareti produrrebbe un miraggio ottico: uno stesso oggetto avrebbe parecchie immagini.

47. Vedi l'inserto a colori, tavola X. [NdC]
48. J.-P. Luminet, J. Weeks, A. Riazuelo, R. Lehoucq, J.-P. Uzan, *Nature*, 435, 9 ottobre 2003, pp. 593-595.
49. Vedi J.-P. Luminet, *La segreta geometria del cosmo*, cit., capitolo 14.

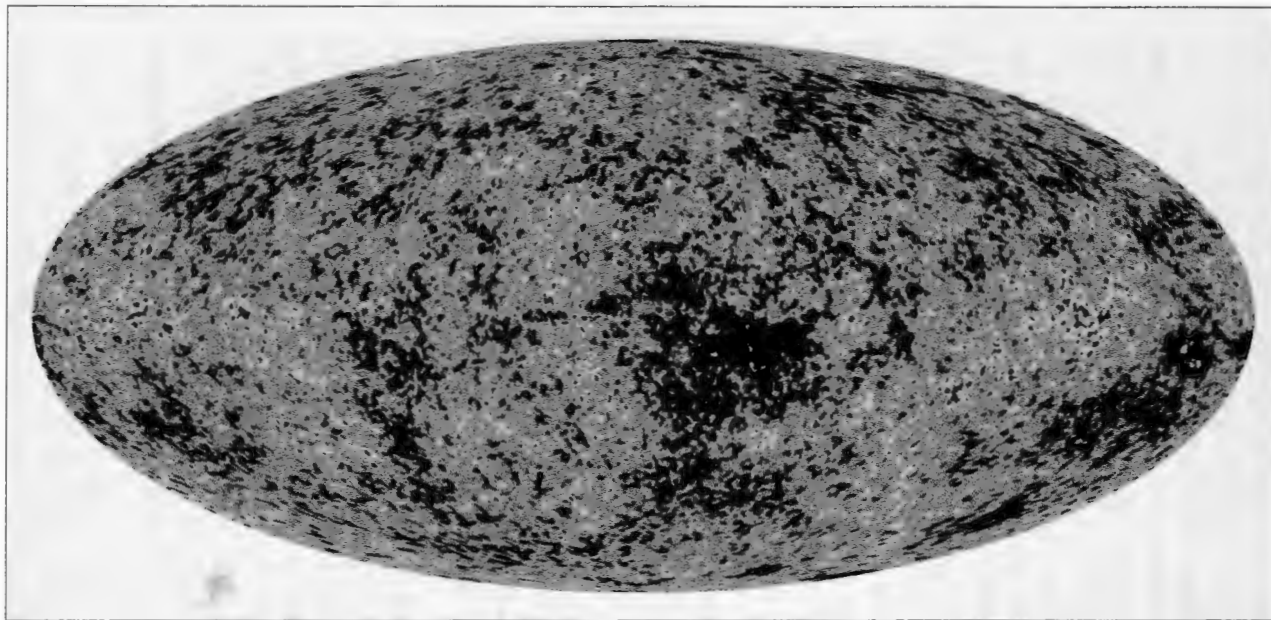



Figura 1.12 La radiazione fossile vista dalla sonda WMAP (*Wilkinson Microwave Anisotropy Probe*)

La totalità del cielo è rappresentata qui nel dominio delle microonde, e rivela il residuo della luce emessa dall'Universo giovane dopo 380.000 anni di espansione. Le minuscole fluttuazioni di temperatura sono codificate dai colori. Corrispondono a piccolissimi grumi di densità che, condensandosi, hanno in seguito generato le prime galassie. L'età dell'Universo, la sua geometria e il suo destino sono inscritti nella distribuzione statistica dei grumi (NASA-WMAP Science Team). Vedi inserto a colori, tavola VI.

Questo modello non costituisce affatto un'alternativa al Big Bang; ne è piuttosto una variante particolare. Lo spazio risulterebbe finito; il suo volume costituirebbe l'80% di quello dello spazio osservato; conterrebbe una quantità finita di materia; sarebbe di curvatura positiva come l'ipersfera, ma di volume 120 volte più piccolo (figura 1.13).

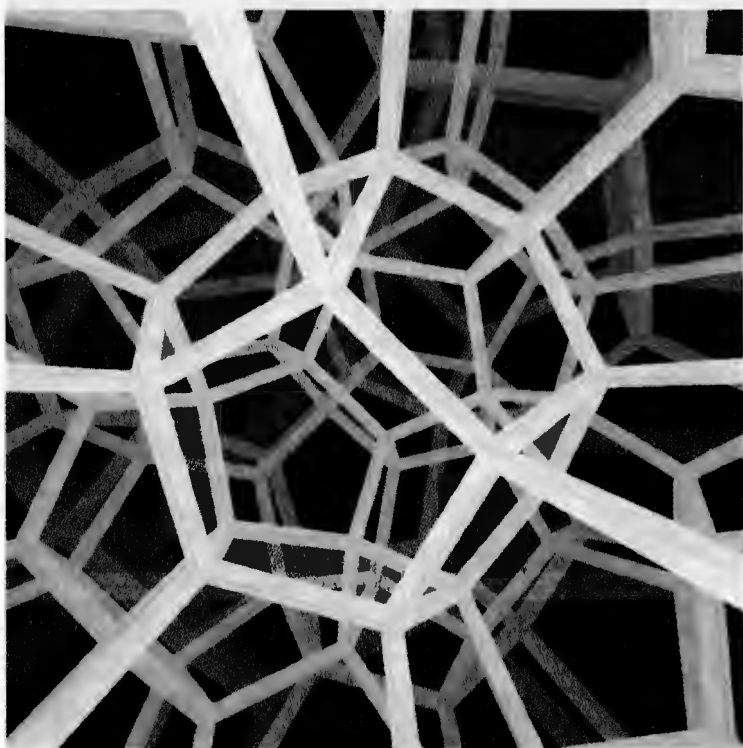



Figura 1.13 Lo spazio dodecaedrico di Poincaré

Un Universo spiegazzato (*chiffonné*) ha una topologia notevole che permette di identificare lo spazio fisico con un poliedro, la cui immagine moltiplicata costituisce il mondo delle apparenze. Rappresentare la struttura dello spazio apparente significa rappresentare la sua struttura "cristallina", ciascuna maglia della quale è una riproduzione del poliedro fondamentale. È qui raffigurata la struttura apparente che offrirebbe lo spazio sferico di Poincaré. Visto dall'interno, si avrebbe l'impressione di vivere in uno spazio cellulare 120 volte più grande, pavimentato da dodecaedri deformati da illusioni ottiche. Per gentile concessione di Jeffrey Weeks.

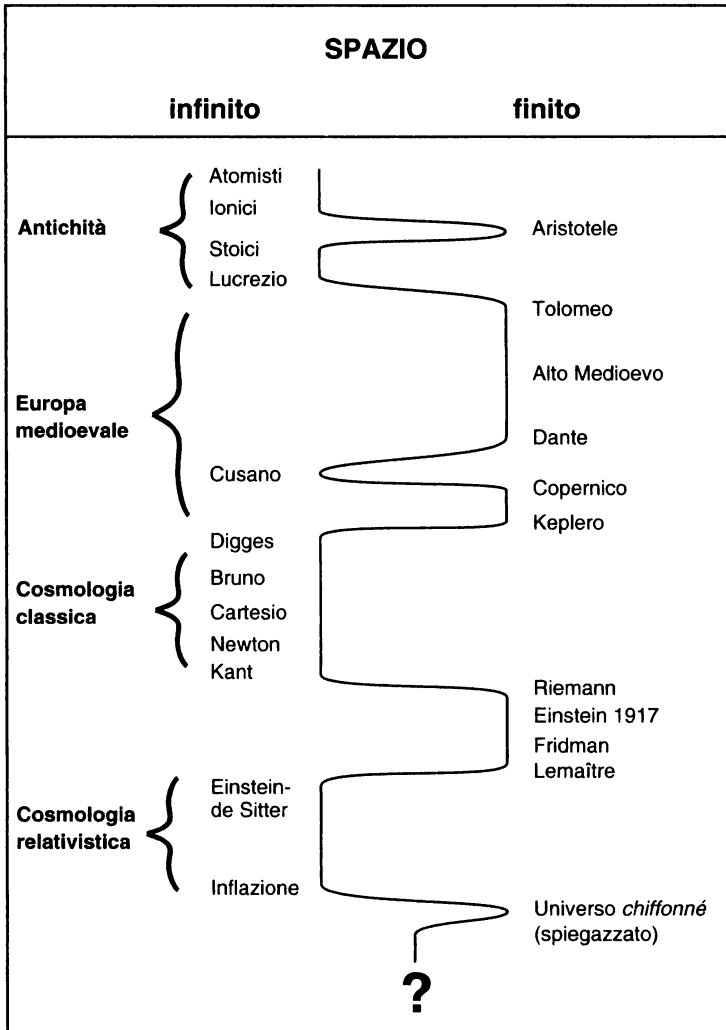



Figura 1.14 Finito o infinito?

L'altalena delle concezioni circa l'estensione dello spazio nel corso della storia può solo concludersi con un punto interrogativo.

L'Universo dodecaedrico consente due predizioni controllabili con gli strumenti del futuro: un valore estremamente preciso, a meno di un centesimo della densità totale dell'Universo (includendo la costante cosmologica), e l'esistenza di segnature precise nella radiazione fossile. Da qui a qualche anno, il modello sarà dunque o confutato o corroborato.

Riassumendo

La questione dell'infinito spaziale getta luce su più di duemila anni di storia della cosmologia. Passando dall'infinito dei Presocratici al finito, e identificando il Mondo fisico con lo spazio geometrico, i filosofi greci hanno compiuto la prima tappa essenziale della modellizzazione cosmologica. Nel secolo XVII l'evoluzione si è svolta in senso opposto: il passaggio dal Mondo chiuso all'Universo infinito è stato consacrato infine da Newton che ha identificato l'Universo con lo spazio euclideo infinito. Terza tappa decisiva, la teoria della relatività generale offre nel Novecento un nuovo quadro per la comprensione dell'Universo in termini di uno spazio-tempo curvato dalla materia. Si fa appello alle geometrie non euclidee, anche se le due possibilità – spazio finito o infinito – sono entrambe presenti entro la stessa modellizzazione. E siamo alla quarta tappa: gli sviluppi della relatività e della topologia consentono di prospettare il problema dei limiti spaziali e temporali dell'Universo da punti di vista completamente nuovi, dando così nuova linfa vitale ai dibattiti sull'infinito (figura 1.14).

2

L'INFINITO DEL NUMERO

> Più di ogni altra questione, quella dell'infinito ha da sempre tormentato la sensibilità degli uomini; più di ogni altra idea, quella di infinito ha stimolato e fecondato la loro ragione; ma più di ogni altro concetto quello di infinito esige di essere chiarito.
>
> DAVID HILBERT

2.1 L'infinito operativo

Ricordiamoci che Aristotele respingeva l'infinito attuale, ovvero negava qualsiasi esistenza fisica all'infinito – pur concedendogli una certa esistenza matematica, necessaria per concepire grandezze sempre più grandi o sempre più piccole. L'oggetto fondamentale della geometria greca era la lunghezza. Per esempio, Euclide fa riferimento non a delle rette senza fine, ma a segmenti di retta prolungabili a lunghezze arbitrarie. Si tratta dunque di un infinito potenziale (si considerano le linee rette finite, riservandosi la possibilità di prolungarle senza fine), e questa appare un'estrapolazione ragionevole dall'esperienza. L'altro concetto, l'infinito attuale, secondo cui esisterebbero *realmente* rette di lunghezza infinita, è differente dal punto di vista metafisico. Analogamente, in teoria dei numeri, Euclide non dice mai che esiste un'infinità di numeri primi, ma che "esistono [sempre] numeri primi in numero maggiore di quanti numeri primi si vo-

glia proporre"[1] e la stragrande maggioranza dei matematici doveva dunque evitare gli infiniti attuali, limitandosi agli infiniti potenziali.

Il rifiuto di considerare esplicitamente l'infinito non impedisce che la nozione sia operativa. Per esempio Proclo (V sec. d.C.) dichiarava di servirsi dell'infinito in vista del finito, senza ammettere né utilizzare l'infinito in atto. L'infinito esiste nell'immaginazione, anche se questa non è in grado di conoscerlo. Proclo ricorreva a un paragone con l'oscurità che si può riconoscere ma non vedere.

Il "metodo degli Antichi"[2]

Per calcolare l'area S di un cerchio Archimede immagina un poligono regolare a n lati inscritto nel cerchio (ovvero, i cui vertici appartengono alla circonferenza del cerchio). Una semplice scomposizione in triangoli permette di calcolare facilmente l'area di tale poligono che è sempre minore di S. Archimede considera allora una successione di poligoni del genere, in cui aumenta il numero n dei lati. Più n è grande, più il poligono si avvicina al cerchio, mantenendosi sempre al suo interno. L'area del poligono aumenta con n, restando sempre minore di quella del cerchio. La successione delle aree dei poligoni (al crescere di n), si avvicina a S per difetto. Archimede considera poi dei poligoni che contengono il cerchio (ovvero, i cui lati siano tutti tangenti alla circonferenza del cerchio). Più il numero di lati è grande, più l'area dei poligoni è piccola, pur restando sempre maggiore di S. La successione delle aree di questi poligoni circoscritti si avvicina a S per eccesso. Archimede riesce così a minorare e a maggiorare l'area del cerchio $S = \pi R^2$ (ove R è il raggio del cerchio). Ciò gli consente di proporre una stima di π uguale a 3,1416.

Il metodo di Archimede, noto usualmente come *metodo di esaustione*, si ritroverà alla base del calcolo differenziale-integrale che sarà sviluppato venti secoli più tardi.

1. Euclide, *Gli elementi di Euclide*, citato in bibliografia, Libro IX, Proposizione 20, p. 543. [NdC]

2. Vedi in proposito P.D. Napolitani, *Archimede*. Le Scienze (collana "I grandi della scienza"), Milano 2001. [NdC]

Una tale utilizzazione è illustrata adeguatamente dal metodo geometrico (figura 2.1) proposto dal siracusano Archimede (287-212 a.C.) per calcolare l'area di un cerchio di raggio R, ovvero alla fine il numero π, dal momento che quest'area è data come πR^2. Si suppone che l'area e il raggio del cerchio siano due grandezze che esistono, siano misurabili ed esprimibili mediante dei numeri – senza che l'infinito debba *a priori* entrarvi! E così Archimede cerca di calcolare questa area senza ricorrere alla nozione di infinito. Metodi simili (come la procedura detta degli *intervalli inscatolati*) sono stati attribuiti già a Eudosso (IV secolo a.C.) e poi a Euclide e ad altri matematici di lingua greca. Tutti questi metodi mettono in gioco l'idea di approssimazione: il risultato esatto viene stimato con un errore che si vuol rendere il più piccolo possibile. Si tratta di procedure utilizzate ancora oggi nei calcoli coi computer. Questi, come tutti i calcolatori artificiali, meccanici o elettronici, non conoscono l'infinito! E nemmeno conoscono l'esattezza matematica, perché questa è tributaria dell'infinito. Il ragionamento di Archimede non fa esplicito appello alla no-

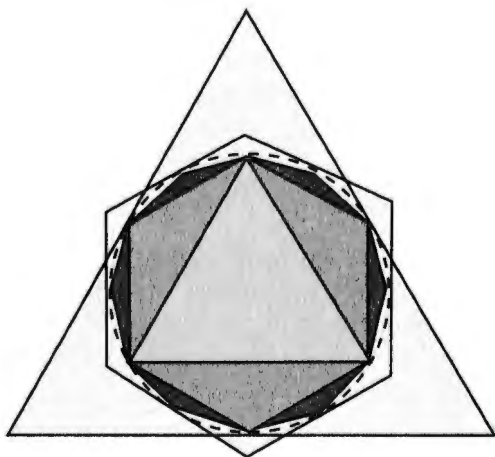



Figura 2.1 Il calcolo del π secondo il metodo degli Antichi

Per calcolare π Archimede considera i poligoni regolari circoscritti e inscritti nel cerchio, e calcola il valore limite compreso tra questi poligoni.

zione di infinito, né a quella di limite o a quella di convergenza (che implicitamente presuppongono tale nozione). E tuttavia, praticamente egli considera il cerchio come un poligono con un numero infinito di lati (o "infinigono"). Se una tale mossa non pone più problemi ai matematici di oggi, già nel V secolo a.C. il sofista Antifonte aveva dato scandalo[3] – dichiarando che il poligono diveniva il cerchio per grandi valori di n. Come abbiamo visto (§ 1.6), Nicola Cusano, nel secolo XV, aveva fatto uso dello stesso argomento per accreditare il concetto di infinito attuale. L'invenzione del calcolo differenziale e integrale alla fine del XVII secolo ha consentito a Leibniz di sostenere che "il poligono che si approssima in modo continuo a una curva non è un'approssimazione ma un equivalente".[4] La matematica moderna utilizza la nozione di limite infinito. Il cerchio è considerato come il limite della successione dei poligoni al tendere di n all'infinito. La sua area viene calcolata come il limite della successione delle aree dei poligoni.

L'impiego dell'infinito, confessato o no che fosse, doveva rivelarsi dunque indispensabile alla risoluzione di svariati problemi matematici.

2.2 Numeri molto grandi

Nella Grecia antica 10.000 era già considerato un numero molto grande. I Greci lo chiamavano *murias*, donde il nostro *miriade*.

Nell'*Arenario* Archimede sviluppa nuovi metodi matematici che lo mettano in grado di esprimere il più grande numero possibile a partire dai simboli di cui dispone. Giunge a $10^{800.000.000}$, che dimostra essere di molto maggiore del "numero dei granelli di sabbia necessari a riempire la sfera delle stelle fisse", valuta-

3. Vedi J. Dieudonné, *L'arte dei numeri. Matematica e matematici oggi*, citato in bibliografia, p. 67.

4. Citato da M. Parmantier nel suo contributo incluso in F. Monnoyeur, (a cura di), *Infini des mathématiciens, infini des philosophes*, citato in bibliografia.

to da lui "solo" dell'ordine di 10^{63}. Per il geniale siracusano, questi numeri giganteschi, sotto un certo profilo difficili da distinguere dall'infinito, ne rappresentano, per così dire, una sorta di concretizzazione.

I grandi numeri hanno da sempre affascinato matematici e fisici. La stima dell'ordine di grandezza delle particelle elementari contenute nell'Universo osservabile è compresa tra 10^{80} e

Colui che conta la sabbia

"Alcuni pensano, o re Gelone, che il numero [dei granelli] della sabbia sia infinito in quantità: dico non solo quello dei [granelli di sabbia] che sono intorno a Siracusa e nel resto della Sicilia, ma anche di quello [dei granelli di sabbia] che sono in ogni regione, sia abitata sia non abitata. Vi sono poi alcuni che ritengono che quel numero non sia infinito, ma che non si possa nominare un numero che superi la sua quantità. È chiaro che se coloro che così pensano si rappresentassero un volume di sabbia di grandezza tale quale quella della Terra, avendo riempito tutti i mari e tutte le depressioni fino a raggiungere l'altezza delle più alte montagne, molto meno comprenderebbero che si possa nominare un numero che superi quella quantità.
"Ma io tenterò di mostrarti, per mezzo di dimostrazioni geometriche che tu potrai seguire, che, dei numeri da noi denominati ed esposti negli scritti inviati a Zeusippo, alcuni superano non soltanto il numero [dei granelli] della sabbia aventi [nell'insieme] grandezza uguale alla Terra riempita come abbiamo detto, ma anche grandezza uguale al cosmo [intero]."[5]
È così che Archimede esordisce nell'*Arenario*. È uno dei primi testi di divulgazione scientifica che siano mai stati scritti. Il siracusano va contro l'idea, diffusa nella sua epoca, di un numero di granelli di sabbia infinito, o troppo grande da essere stimato: "E chi numerar potrà le arene?", aveva scritto Pindaro due secoli prima (*Ode Olimpia*, II, 98).[6]

5. Archimede, *Arenario*, in *Opere*, citato in bibliografia, p. 447. [NdC]
6. Utilizziamo qui la versione di E. Romagnoli in Pindaro, *Le odi*, citato in bibliografia, vol. I, p. 80. [NdC]

10^{87}. Il numero 10^{100} (che si scrive, dunque, con 101 cifre decimali) è detto "googol"; ha dato così nome al celebre motore di ricerca su Internet *Google*, che si vanta di esplorare milioni di pagine web in meno di un secondo. Nel suo *Le hasard* (1914),[7] il matematico Emile Borel (1871-1956) presenta il sofisma (destinato a diventar famoso) delle "scimmie dattilografe": evoca un esercito di scimmie che, dopo aver saccheggiato un deposito di macchine da scrivere, hanno imparato la dattilografia, e producono così "la copia esatta di libri di qualsiasi natura e di tutte le lingue, conservati nelle più fornite biblioteche del mondo". Poi, le scimmie si atteggiano a profeti: "Il nostro esercito di scimmie dattilografe, lavorando sempre nelle stesse condizioni, fornirà ogni giorno la copia esatta di tutti gli stampati, libri e giornali che compariranno il giorno corrispondente della settimana successiva su tutta la superficie del Globo, e di tutte le parole che saranno pronunciate da tutti gli esseri umani in quello stesso giorno". Prendiamo come esempio l'opera completa di William Shakespeare (battuta a macchina senza errori), e semplifichiamo il tutto mettendo una sola scimmia al lavoro. Quanto tempo le sarà necessario? Ci sono circa cinque milioni di lettere da battere a macchina e ogni tentativo richiede all'animale pressappoco sei mesi. Dal momento che ci sono circa 60 caratteri possibili (comprese le maiuscole), ci sono dunque $60^{5.000.000}$ di possibilità di cui una sola è quella buona; la scimmia ha una buona probabilità di arrivarci al compiersi di 10^{107} anni – un numero maggiore di googol.

Nel 1999 è stato scoperto il trentottesimo numero primo di Mersenne: $2^{6.972.593} -1$, il primo a superare il traguardo del milione di cifre decimali (si tratta, in realtà, di 2.098.960 cifre). Al momento in cui scriviamo queste righe, il più grande numero mai utilizzato in una dimostrazione matematica in modo pertinente è il "numero di Graham". Se tutta la materia dell'Universo fosse trasformata in inchiostro, non sarebbe sufficiente a scriverlo in notazione decimale; allora, viene espresso servendosi di una notazione apposita, escogitata dal matema-

7. E. Borel, *Le hasard*, Alcan, Paris 1914.

tico Donald Knuth allo scopo di descrivere i numeri molto, molto grandi.

Malgrado tutto, questi numeri mostruosi sono ancora infinitamente lontani dall'infinito...

Funzioni che tendono all'infinito

La matematica pullula di funzioni che tendono all'infinito. Per esempio, è noto che se la variabile x tende all'infinito, la funzione x^2 tende all'infinito più rapidamente, e la funzione esponenziale $exp(x)$, ancora più rapidamente. A cominciare con un teorema, dimostrato nel 1936 da Alonzo Church e da Alan Turing, i matematici hanno mostrato l'esistenza di una funzione $f(n)$ che tende all'infinito più rapidamente di qualsiasi funzione calcolabile.[8] In questo contesto, la parola calcolabile ha un significato preciso: indica qualsiasi funzione di cui si può programmare su un computer il calcolo dei suoi valori. La famiglia delle funzioni calcolabili include tutte le funzioni che si possono scrivere con i simboli matematici abituali, come potenze, esponenziali, fattoriali, ecc. Ben inteso, $f(n)$ non è calcolabile...

2.3 Intuizioni di infinito

Poiché non possiamo concepire una qualche fine al processo di numerazione dei numeri interi, siamo tentati di concludere che essi siano in numero infinito. La loro successione ci sembra infinita, ma si tratta di infinito potenziale. Possiamo essere più precisi? Possiamo parlare del numero di tutti gli interi e manipolarlo? Agostino di Ippona concedeva questa facoltà a Dio e a Lui solo: "L'intelligenza divina è capace di abbracciare qualsiasi infinità, e di abbracciare gli esseri innumerevoli senza enumerazione mentale". Dopo di lui, un lungo processo porterà infine a una attualizzazione di questo infinito potenziale: la teoria degli insiemi e i lavori di Cantor nell'Ottocento consentiranno di definire l'infinito, o piuttosto i cardinali infiniti.

8. Vedi J.-P. Delahaye, *Pour la Science*, n. 175, maggio 1992.

Emerge anche un'altra questione, simile ma anche un po' differente. Mentre sembra sempre possibile costruire un numero intero maggiore di qualsiasi numero assegnato, si sarebbe tentati di parlare del "maggiore di tutti i numeri interi". Se tale espressione ha un senso, può solo caratterizzare un numero infinito; un siffatto infinito sarebbe qualificato come "ordinale", in opposizione al numero "cardinale" di cui sopra si è detto.

Se una lunga storia ha condotto i matematici ai grandi infiniti ordinali e cardinali, l'infinito si presenta in matematica anche in altre modalità. Nel Capitolo 3 di *questo volume* si tratterà dell'infinitamente piccolo e della questione della continuità. Già da ora, è bene rendersi conto che la manipolazione di certi numeri finiti impone di fare appello a una qualche nozione di infinito. Per esempio, è questo il caso dei numeri detti *irrazionali*: cioè dei numeri che non sono frazioni.

2.3.1 Gli irrazionali

Nel VI secolo a.C. i matematici greci, influenzati da Pitagora, si erano pressoché convinti che a ogni grandezza fisica o geometrica fosse possibile associare o un numero intero o un rapporto di due numeri interi (quello che noi chiamiamo un numero *razionale*). Ben presto, dovevano accorgersi che avrebbero dovuto ricorrere ad altri numeri che non erano razionali. Per esempio, si può elevare un numero al quadrato, moltiplicandolo per se stesso. L'estrazione di radice quadrata è l'operazione inversa. Ma nessun razionale fornisce la radice quadrata di 2; eppure, la lunghezza della diagonale di un quadrato di lato 1 deve appunto avere quel valore, che notiamo $\sqrt{2}$. Analogamente, se si calcola esattamente il perimetro di un campo quadrato di superficie 2 km^2, per esempio allo scopo di farne la recinzione, si ha come risultato $4\sqrt{2}$: anche questo è un numero irrazionale. La lunghezza $\sqrt{5}$ dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo i cui cateti misurano rispettivamente 1 m e 2 m è irrazionale. La "sezione aurea" $(1 + \sqrt{5})/2$, che tradizionalmente definisce i canoni della bellezza, corrisponde alla sezione "ideale" di una lunghezza nella sua proporzione più

elegante: essa è definita in modo tale che il rapporto della parte più piccola a quella più grande sia uguale al rapporto della più grande al tutto. Anche tale *sezione aurea* è irrazionale. In effetti, qualsiasi numero irrazionale combinato con un razionale mediante operazione di addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione dà ancora luogo a un irrazionale.

La scoperta degli irrazionali ha innescato la prima crisi della storia della matematica. Di fatto, gli irrazionali si rivelano nella pratica tanto indispensabili quanto gli interi e i razionali. Ma la loro definizione e la loro scrittura fanno appello alla nozione di infinito. Per scriverli bisognerebbe disporre di un numero infinito di decimali. In linguaggio moderno: ogni numero può scriversi sotto forma decimale. La scrittura di un numero irrazionale esige di specificare la sequenza di tutte le sue cifre decimali. Orbene, tale sequenza si distingue, appunto, per il suo carattere infinito. Se fosse finita (o infinita, ma periodica), ciò proverebbe che si può scrivere il numero in questione come rapporto di due numeri interi: sarebbe allora un razionale. Questo carattere specifico non dipende dalla notazione decimale; esprime invece il fatto che questi numeri vengono veramente concepiti come il risultato di un principio infinito. Supponiamo che si voglia controllare semplicemente se due numeri irrazionali sono uguali: la cosa esigerebbe di confrontare tutti i decimali, uno per uno – e dunque richiederebbe un numero infinito di operazioni. Qualsiasi calcolo numerico, a partire dai numeri irrazionali, implica un'infinità di operazioni. In un certo senso, gli irrazionali sono a un tempo finiti e infiniti: dipende dal punto di vista da cui li si considera (analogamente, in contesto geometrico, un segmento di linea retta è finito dal punto di vista della lunghezza, infinito dal punto di vista dell'insieme dei suoi punti).

Nonostante la definizione dei numeri irrazionali faccia appello all'infinito, oggi sappiamo manipolare in tutta tranquillità numeri come $\sqrt{2}$, definiti come il limite di una successione infinita di numeri razionali (o, se si preferisce, mediante un numero infinito di decimali). L'infinito che ci è servito per costruirli è del tutto nascosto, e questi numeri ci appaiono così perfettamente finiti.

Per qualche decimale in più...

I numeri più semplici sono i numeri interi positivi: 1, 2, 3, ecc., e il loro insieme viene indicato dalla lettera **N**. A partire da essi, l'operazione di sottrazione (operazione inversa dell'addizione) permette di definire gli interi negativi: –1, –2, –3, ecc. In modo analogo, l'operazione di divisione (inversa dell'operazione di moltiplicazione) ci porta a definire le frazioni (o numeri razionali), il cui insieme viene indicato dalla lettera **Q**. Ogni numero razionale (cioè, frazionario) può venir scritto in forma decimale. Questi decimali sono o in numero finito (per esempio, 5/4 = 1,25) o esibiscono una periodicità (per esempio, 1/9 = 0,111111...). Possiamo allora immaginare un numero che abbia un numero infinito di decimali non periodici? La risposta è affermativa. Corrisponde tale numero a una frazione? La risposta è negativa. Si tratta di un numero irrazionale.

2.3.2 I trascendenti

Tra gli irrazionali, alcuni sono di una natura ancora più complicata degli altri: sono i numeri *trascendenti*, che non sono radice di alcuna equazione algebrica del tipo $a_n x^n + an^{-1}x_{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$, dove gli a_n sono degli interi relativi.

È il caso del numero π, che esprime il rapporto della circonferenza di un cerchio col diametro, o di $e \approx 2{,}71828\ldots$, la base dei cosiddetti logaritmi naturali.

Leibniz, applicando il suo calcolo infinitesimale alla soluzione di problemi fisici, trovò come soluzioni delle curve trascendenti (cioè soluzioni non algebriche di certe equazioni). Queste curve hanno, come i numeri cui spetta lo stesso aggettivo, un carattere infinito, il che spinge Leibniz a dire che "l'origine delle grandezze trascendenti è l'infinito". A suo parere, è solo il fatto che tali curve appaiano come soluzioni di certi calcoli fisici che ne giustifica lo studio, proprio com'è per l'infinito: "La natura fa entrare l'infinito in tutto quello che fa". Anzi, l'infinito si trova dappertutto in matematica. Non se ne può respingere l'impiego senza rinunciare a utilizzare il nume-

ro π e gli altri irrazionali. C'è qualche cosa di infinito in un cerchio, in un segmento di retta, piccolo quanto si voglia, e in ogni numero irrazionale.

2.3.3 *Successioni, serie e convergenza*

La nozione di successione, essenziale tanto in matematica quanto in fisica, implica l'infinito. Una successione è definita da una procedura che consente, a partire da un elemento, di definire il successivo. Se il prototipo è la successione dei numeri interi, si può definire pure la successione dei numeri pari, quella dei numeri primi, quella dei quadrati perfetti, ecc. Se il processo non ha mai fine, la successione è detta infinita. Uno dei limiti dovuti al carattere infinito di una successione è l'impossibilità di rispondere alle domande concernenti tutti i suoi elementi. È lecito allora considerare una successione infinita come un oggetto compiuto? La risposta è affermativa, almeno per alcune successioni. Per esempio, abbiamo già accennato che ogni numero irrazionale può essere definito come una successione di numeri razionali (si chiama *successione di Cauchy*).[9] Il fatto che si manipolano gli irrazionali come tutti gli altri numeri mostra che si possono manipolare almeno certe successioni infinite. Matematici e fisici si trovano spesso a effettuare la somma infinita di tutti i termini di una successione – si parla allora di *serie*. Mentre il numero dei termini è infinito, il risultato può essere finito: in tal caso la serie viene detta *convergente*. Essa pare manifestare un'unione di finito e infinito.

9. Si può anche considerare un irrazionale come la successione infinita dei suoi decimali.

2.4 Attualizzazione dell'infinito

> C'è un concetto che è il corruttore e l'ammattitore degli altri. Non parlo del Male il cui limitato impero è l'etica; parlo dell'infinito.
>
> JORGE LUIS BORGES

Per tutta la storia delle idee, la nozione di infinito attuale è stata respinta a causa di un paradosso che ne deriva: il paradosso della *riflessività*. Tale paradosso riguarda l'infinitamente grande degli insiemi; consiste nel farci riconoscere "parti grandi quanto il tutto". Compare, per esempio, quando si vuole comparare l'insieme degli interi con, poniamo, l'insieme dei numeri pari, o l'insieme degli interi con l'insieme dei loro quadrati.

Questa bizzarria era nota da tempo: si potrebbero citare Proclo, Filopòno, Thabit ibn Quarra. Nel XIII secolo il francescano e matematico scozzese Giovanni Duns Scoto prende in considerazione due circonferenze concentriche: i raggi tracciati a partire dal centro comune consentono di mettere ciascun punto della circonferenza maggiore in corrispondenza con un punto della circonferenza minore; quest'ultima ha dunque tanti punti quanti ne ha la maggiore, anche se, palesemente, l'una è minore dell'altra! Nel XVII secolo Galileo ricorre a un argomento analogo per giustificare razionalmente la ripugnanza per l'infinito da cui egli è ancora posseduto. Egli prende in considerazione la successione dei quadrati n^2 dei numeri interi n. Fa osservare che a ogni intero 1,2,3,4, ecc. possiamo associare il suo quadrato 1,4,9,16, ecc. I due insiemi sono infiniti, possono essere messi in corrispondenza termine a termine; detto altrimenti, sono *equinumerosi*. Tuttavia, l'insieme dei quadrati è solo una parte dell'insieme degli interi, e dunque la corrispondenza viola l'assioma che "il tutto è maggiore della parte". Ammettere il paradosso della riflessività sembrerebbe un'audacia insensata. È proprio tale paradosso che, nei secoli, ha preoccupato i matematici, al punto di renderli estremamente prudenti nell'impiego degli infiniti, dal momento che alcuni di loro ritenevano persino pericoloso, se non addirittura scandaloso, evocare l'infinito attuale. Così, a lungo si è preferito credere che solo un essere

anch'esso infinito – Dio – potesse concepire l'infinito. E la stessa Chiesa si è opposta ai tentativi umani di pensare l'infinito attuale. Tommaso d'Aquino riteneva che chiunque si azzardasse a concepire l'infinito attuale commettesse un abominevole peccato d'orgoglio, poiché entrava in concorrenza con la natura unica e assolutamente infinita di Dio.

Nel trapasso dal mondo medioevale a quello del Rinascimento, certuni – saremmo tentati di chiamarli i precursori – hanno tuttavia cominciato ad ammettere l'idea di infinito in atto. Roberto di Lincoln, detto il Grossatesta (1170-1253), dichiara che un numero infinito può essere più grande di un altro. Nicola di Oresme (1320-1382) sottintende l'esistenza di diversi infiniti, là dove dichiara che "ciascuno di essi è incomparabile con qualche altro". Gregorio da Rimini (ca. 1300-1358) insiste sulla possibilità accordata a Dio di produrre un infinito in atto e persino di manipolare degli infiniti disuguali.

Al contrario di Cartesio e di Pascal, Bernard Le Bovier de Fontenelle (1657-1757) tenta di conferire razionalità all'infinito, eludendo le sottigliezze della teologia e della metafisica. Nei suoi *Elements de la géométrie de l'infini* (1727) si interroga sulla natura della fisica e della matematica, sui metodi scientifici e sulla ricerca di base. Pone la distinzione tra infinito geometrico e infinito metafisico, e qualcuno potrebbe considerarlo un araldo dell'opera di Cantor (§ 2.6) là dove evoca un "numero infinito [che] esiste tanto realmente quanto i numeri finiti". Lungi dall'essere ancora padroneggiato, il pensiero dell'infinito appare almeno "padroneggiabile e suscettibile di illustrare, o addirittura di fondare il senso della matematizzazione e, correlativamente, quello della fisica matematica".

Leibniz, suo contemporaneo, si presenta anch'egli come un difensore dell'idea dell'infinito attuale: "Sono talmente per l'infinito attuale che, invece di ammettere che la natura lo aborre, come si dice volgarmente, ritengo che essa lo manifesti ovunque, per meglio marcare la perfezione del suo Autore",[10] scrive. Si tratta qui soprattutto di un infinito filosofico, diverso

10. G.W. Leibniz, *Opera omnia*, Studio Ludov. Dutens, tomo II, parte X, p. 243.

da quello delle totalità infinite che vengono prese in considerazione nel paradosso della riflessività.

I difensori dell'infinito attuale restano comunque isolati. Le difficoltà concettuali dell'infinito scoraggiano la stragrande maggioranza dei matematici. Uno dei più brillanti e rivoluzionari tra loro, Carl Friedrich Gauss (1777-1855), esprime il sentimento condiviso dalla comunità matematica del suo tempo con queste parole: "Io contesto che si utilizzi un oggetto infinito come un tutto completo; in matematica questa operazione è vietata; l'infinito è solo un modo di parlare".

L'albergo di Hilbert

Il grande matematico tedesco David Hilbert (1862-1943) ha fornito una descrizione incisiva del paradosso della riflessività. Immagina un albergo provvisto di un numero infinito di camere, che sono tutte occupate. Arriva un nuovo cliente. Dove metterlo? Niente paura! L'addetto al ricevimento deve semplicemente spostare l'occupante della camera n. 1 nella n. 2, quello della n. 2 nella n. 3, e così via. L'ultimo arrivato potrà così prendere possesso della camera n. 1. Immaginiamo ora che sbarchino vari pullman di turisti, addirittura in numero infinito. Anche in quel caso, l'addetto può accontentare tutti alla perfezione: sposta l'occupante della camera n. 1 nella n. 2, quello della n. 2 nella n. 4, quello della n. 3 nella n. 6, e cosi via. In questo modo una camera su due viene liberata (è il caso di tutte quelle che hanno un numero dispari!).

2.5 I paradossi dell'infinito

È il filosofo e matematico ceco Bernard Bolzano (1781-1848) che con l'affrontare il paradosso della riflessività apre davvero la via a quella che è oggi la nostra concezione dell'infinito. La citazione di Leibniz (vedi paragrafo precedente) è ben degna di figurare come esergo della sua opera, *I paradossi dell'infinito* (pubblicata postuma nel 1851).

Bolzano segna una tappa matematica decisiva là dove di-

fende con convinzione l'idea di un infinito attuale, e non solo potenziale. Il suo statuto ontologico dovrebbe essere esattamente lo stesso di quello che spetta agli altri numeri (finiti), e la matematica dovrebbe essere in grado di manipolarlo nello stesso modo in cui manipola qualsiasi altro suo oggetto. Siffatto infinito, riferito a insiemi e a grandezze, sarebbe allora un oggetto quantitativo dotato di perfetta legittimità, diversamente dall'infinito qualitativo dei filosofi. Bolzano spera così di fondare la metafisica dell'infinito a partire dal "dominio della matematica".[11] Considera, anche se in un modo ancora non formalizzato, il concetto di un insieme infinito di oggetti come qualcosa che "può essere pensato tutto insieme", e non semplicemente come successione priva di termine ultimo.[12]

Uno dei suoi apporti essenziali consiste nell'aver ricusato il carattere paradossale delle proprietà dell'infinito: tale carattere sussiste in tanto in quanto si tenta di applicare all'infinito concetti finitisti. Al contrario, Bolzano dichiara che le proprietà considerate paradossali vanno impiegate per *definire* l'infinito. Propone così di utilizzare la proprietà apparentemente più paradossale, quella della riflessività,[13] come caratteristica delle totalità infinite – cosa che comporta l'abbandono per le totalità infinite del principio del tutto e della parte. Si tratta dello stesso

11. B. Bolzano, *I paradossi dell'infinito*, citato in bibliografia, p. 27.

12. *Ibidem*, § 15, ovvero pp. 45-46. Vedi anche § 25, ove si sostiene l'esistenza dell'infinito "anche nel dominio dell'attualità" (p. 59).

13. Si veda in particolare il § 20 de *I paradossi*: "Passiamo ora alla considerazione di una particolarità altamente notevole che può presentarsi nelle relazioni fra due insiemi, *quando sono entrambi infiniti*, anzi, parlando propriamente, che si presenta sempre, ma che è stata ignorata finora, con grave svantaggio per la conoscenza di molte importanti verità della metafisica, della fisica e della matematica, e che anche ora, quando la avrò enunciata, sarà giudicata a tal punto paradossale che sarà necessario che ci indugiamo un poco più a lungo nella sua considerazione. Io affermo precisamente questo: due insiemi, che siano entrambi infiniti, possono trovarsi in una relazione reciproca tale che, *da un lato*, sia possibile accoppiare ciascun oggetto appartenente a un insieme con un oggetto appartenente all'altro, con il risultato che nessuno degli oggetti in entrambi gli insiemi non appartenga ad almeno una coppia, e neppure compaia in due o più coppie; e nonostante ciò sia tuttavia possibile, *dall'altro lato*, che l'uno di questi insiemi comprenda in sé l'altro come semplice parte" (B. Bolzano, *I paradossi dell'infinito*, cit., pp. 51-52). [NdC]

argomento un tempo sfruttato per respingere l'infinito, e ora diviene la proprietà definitoria degli insiemi infiniti!

La soluzione del paradosso della riflessività è resa perfettamente chiara dal fatto che la relazione insiemistica "è contenuto in" non deve essere confusa con la relazione "ha una taglia più piccola che". I numeri quadrati perfetti sono contenuti nei numeri interi, ma come totalità hanno la stessa taglia. È pur vero che se l'insieme A è contenuto nell'insieme B, allora la taglia di A non può essere maggiore della taglia di B; ma se A e B sono infiniti, le loro taglie possono anche essere uguali... In queste condizioni è piuttosto il finito che viene definito in modo privativo, cioè dal fatto che non possiede tale proprietà di riflessività.

Ecco un'altra idea fondamentale: non c'è un solo infinito, ma *parecchi*: se l'infinito fosse unico, il numero infinitamente grande sarebbe il più grande di tutti. Il che è impossibile. Bolzano considera la molteplicità come la condizione di esistenza dell'infinito. Questo gli permette di delineare concretamente l'idea di infiniti quantitativi e quella di un calcolo per l'infinito.

Se pure prefigurano quelli a cui oggi noi siamo tranquillamente abituati, i calcoli di Bolzano sono, però, ancora confusi e imperfetti. Toccherà a Richard Dedekind (1831-1916) e soprattutto a Georg Cantor (1845-1918) conferire una forma alle idee di questo geniale precursore e svilupparle in modo articolato.

2.6 I cardinali infiniti di Cantor

> La più alta perfezione di Dio è la possibilità di creare un insieme infinito, e la sua immensa bontà lo conduce a crearlo.
>
> GEORG CANTOR

2.6.1 Il numerabile

In modo generale, il numero degli elementi di un insieme – la sua "taglia" – è detto il suo numero cardinale. Per un insieme finito non c'è problema. Per esempio, l'insieme dei primi 100 numeri pari contiene 100 elementi. Il suo cardinale è dun-

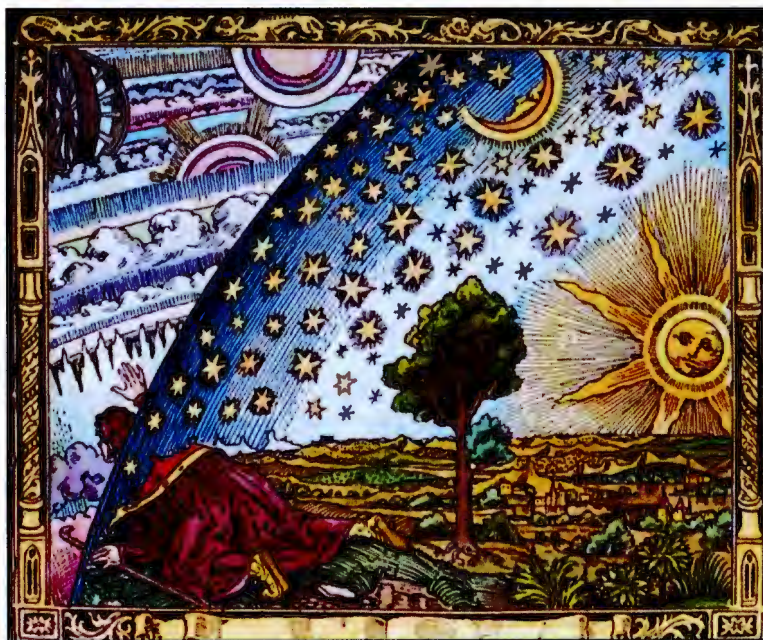



Tavola I I cieli concentrici del Medioevo. L'incisione è stata colorata da Blandine Lemoine. L'originale è al Deutsches Museum, Münich, coll. Carmen © Explorer.

Tavola II Galassia spirale NGC3949 vista dal telescopio Hubble. Fonte: NASA, ESA e Hubble Heritage Team.

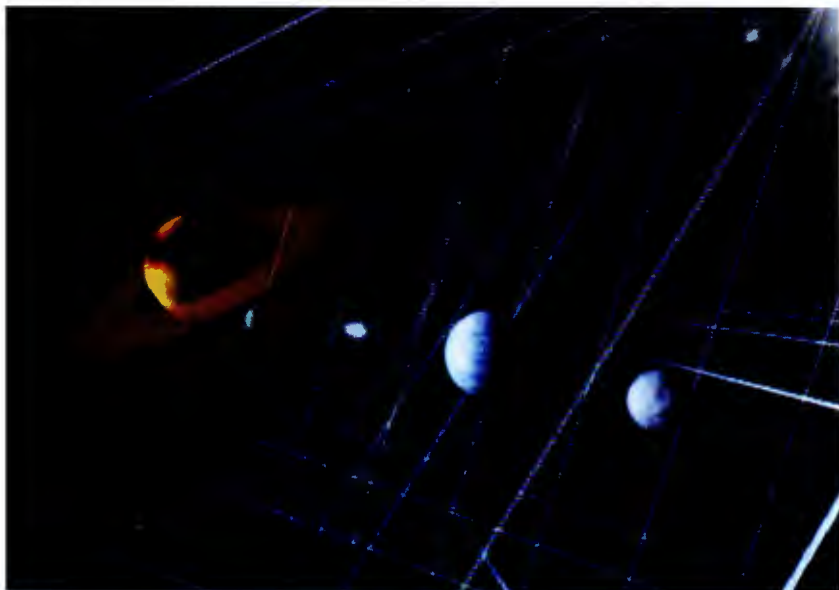



Tavola III L'Universo newtoniano.

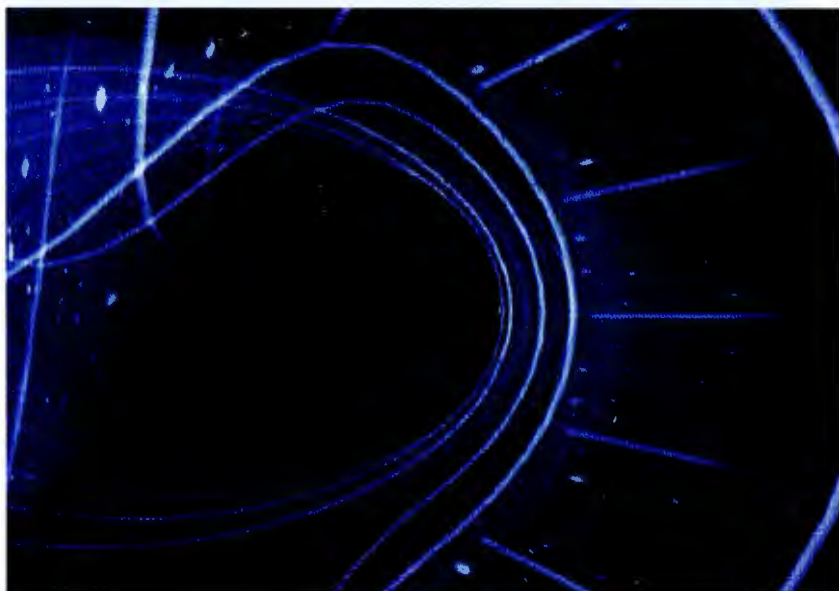



Tavola IV L'Universo relativistico.

Queste immagini sono tratte dal film *Infiniment courbe*, sceneggiatura di Laure Delesalle, Marc Lachièze-Rey e Jean-Pierre Luminet © CNRS.

Tavola V Il cielo notturno. Foto Robert Williams e Hubble Field Team (STScI) e NASA.

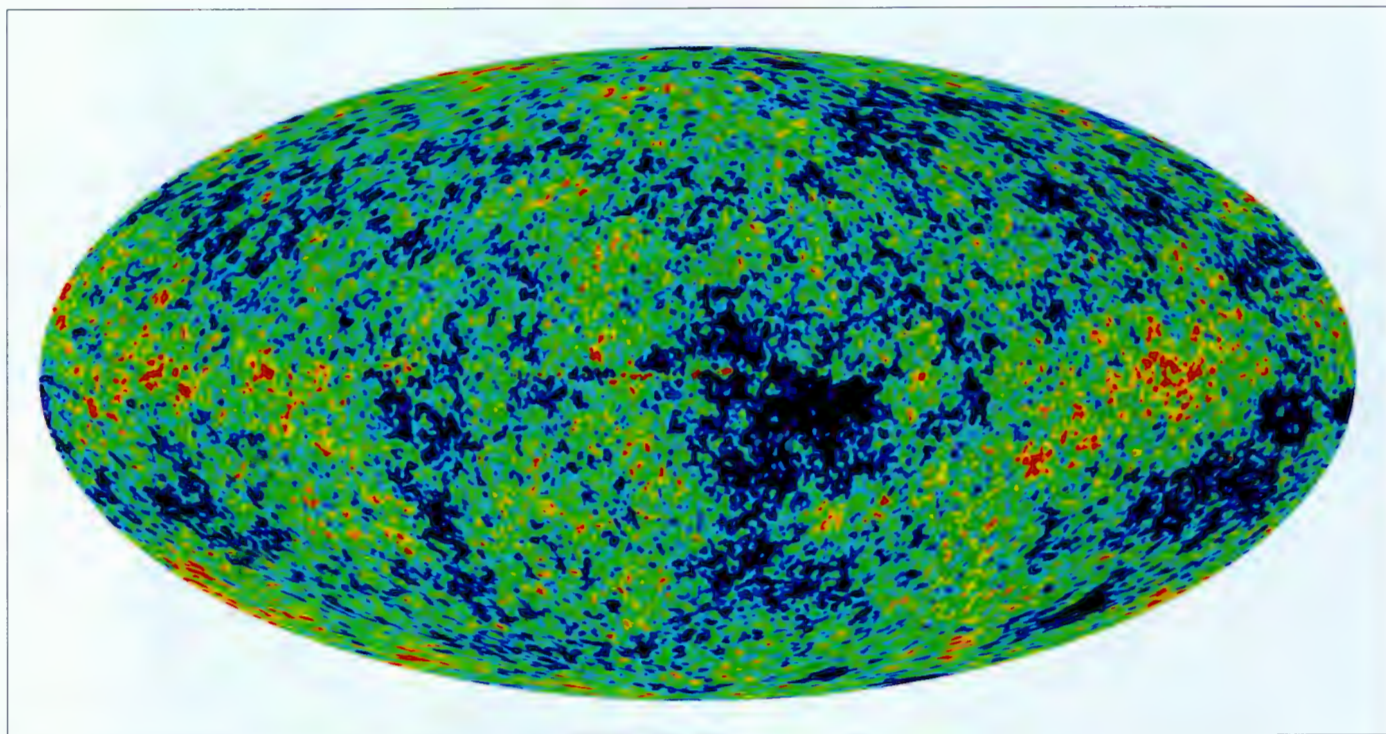
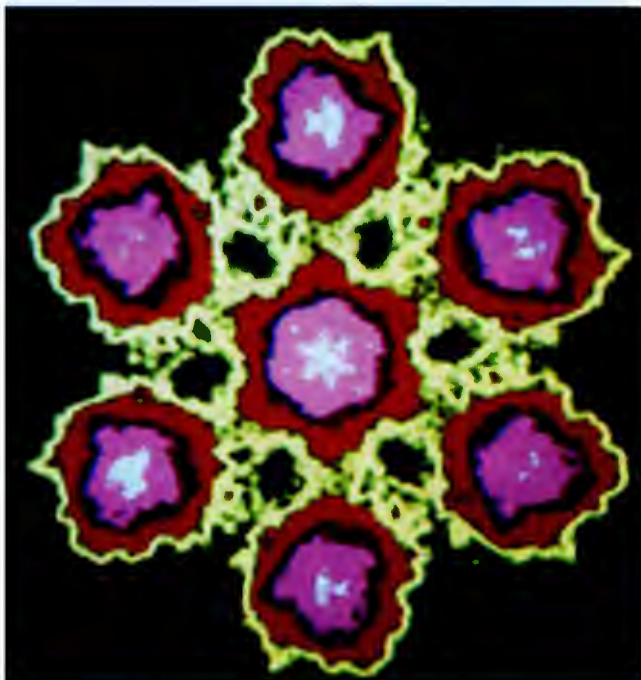



Tavola VI La radiazione fossile vista dalla sonda WMAP. Fonte: NASA-WMAP Science Team.

avola VII Enciclopedia medioevale del secolo XIV. © Bibliothèque
ainte-Geneviève, Paris.

avola VIII L'atomo. Fonte: Mitsuo Ohtsuki/Science Photo Library/

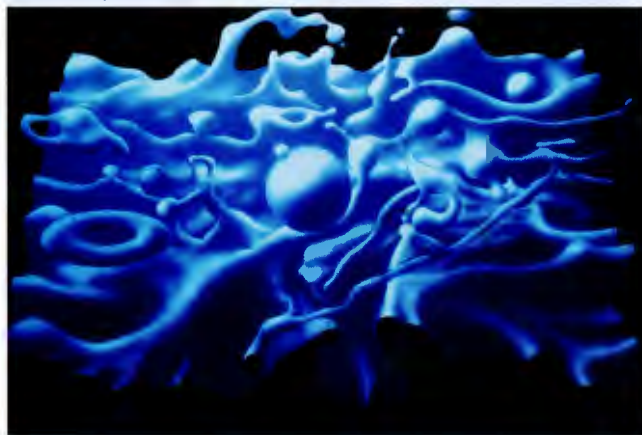
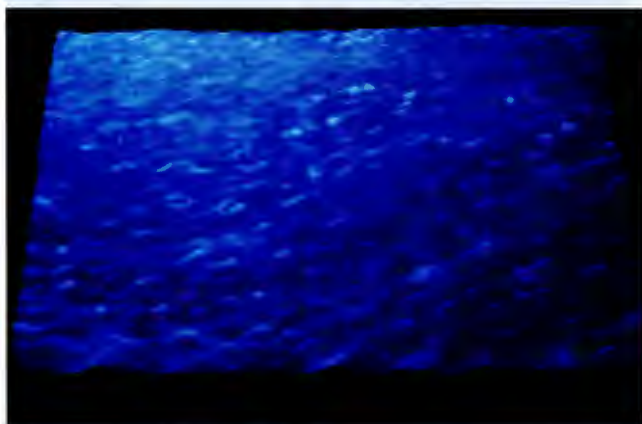



Tavola IX Tre immagini dello spazio. J.-M. Joly/Ciel & Espace.

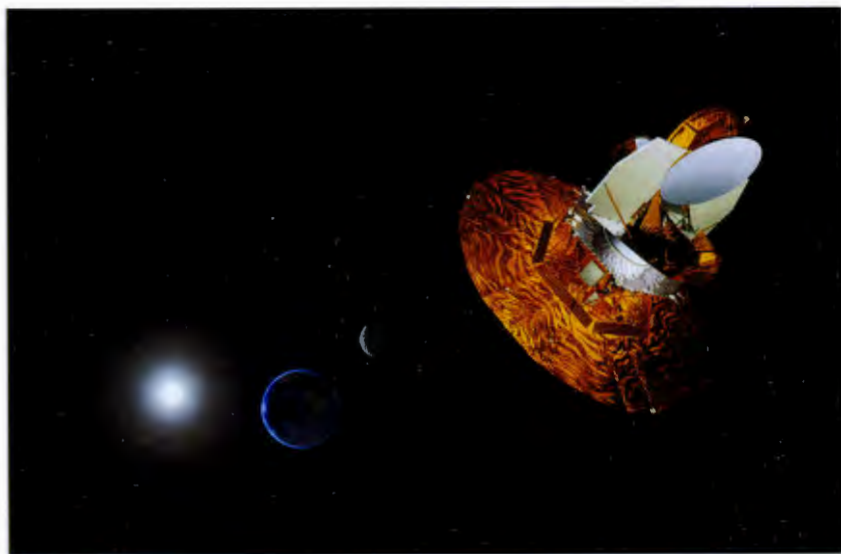



Tavola X Il satellite della missione WMAP collocato nel punto di Lagrange L_2. Fonte: NASA-WMAP Science Team.

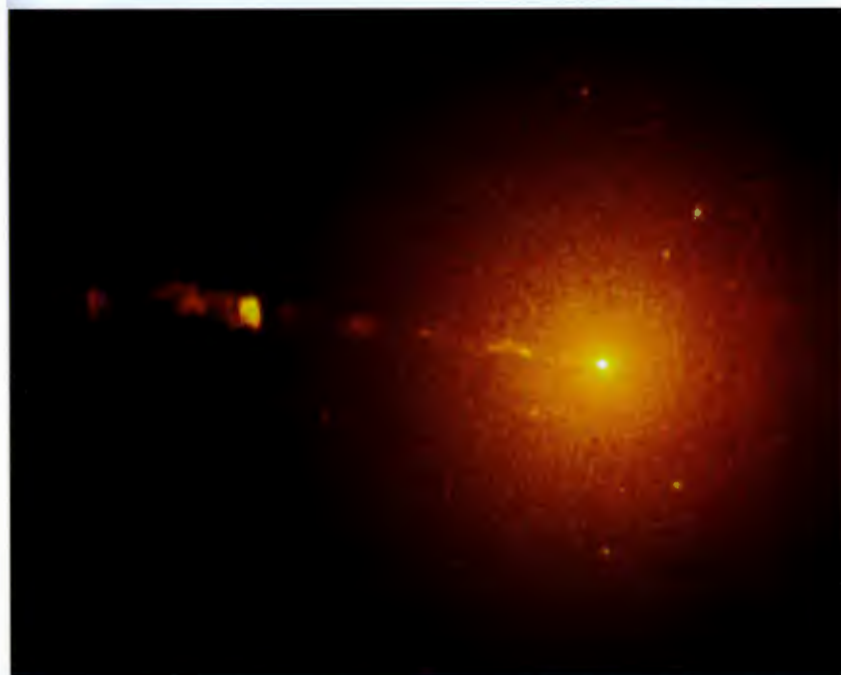



Tavola XI Buco nero al centro della galassia M-87 ripreso dal telescopio spaziale Hubble. Fonte: R. Lauer, M. Faber e NASA.

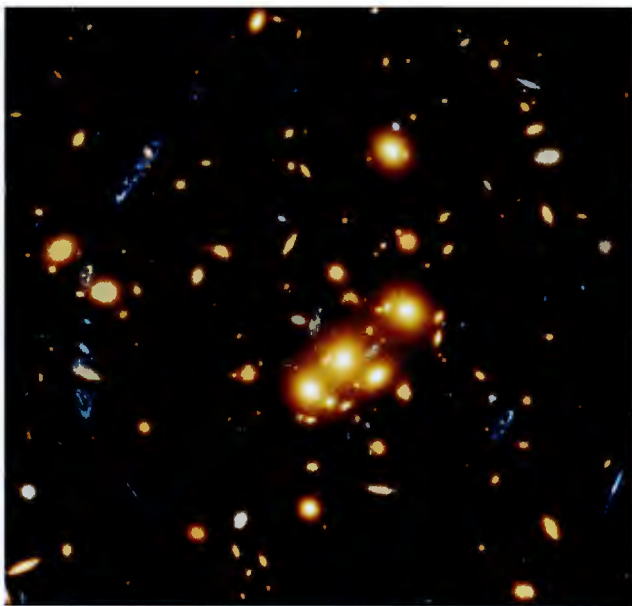



Tavola XII Miraggio gravitazionale (in azzurro) ripreso dal telescopio spaziale Hubble presso due galassie spirale ed ellittica (0024 e 1654). Fonte: W.-N. Colley, E. Turner, J.-A. Tyson e NASA.

Tavola XIII Supernova (in alto a destra) nelle vicinanze della galassia NGC2403. Fonte: NASA, ESA e Hubble Heritage Team.

que 100, che differisce dal suo maggiore elemento che è il numero 200. Ma qual è il cardinale dell'insieme dei numeri interi? Se si riesce a definirlo, sarà ovviamente un cardinale infinito. In analogia con i cardinali degli insiemi finiti, che sono numeri finiti, un cardinale infinito svolgerà il ruolo di un numero infinito.

La prima tappa del lavoro di Cantor consiste nel comparare i cardinali di due insiemi. Ci si basa qui sulla nozione di *corrispondenza biunivoca*: due insiemi sono in corrispondenza biunivoca se e solo se ogni elemento dell'uno può essere messo in corrispondenza con un elemento dell'altro, senza ripetizione e senza omissione. Immaginiamoci una gigantesca sala da ballo nella quale vogliamo comparare il numero dei giovanotti a quello delle ragazze. Sarebbe noioso contare uno per uno gli uni e le altre. Chiediamo piuttosto ai cavalieri di invitare le loro dame. Se nessun ragazzo resta senza dama e se nessuna ragazza rimane a far da tappezzeria, è segno che il numero dei giovanotti è eguale a quello delle ragazze (altrimenti, noteremmo che qualcuno, o qualcuna, resta escluso, o esclusa). La corrispondenza biunivoca tra tutti gli elementi dei due insiemi, quello dei ragazzi e quello delle ragazze, senza ripetizione e senza omissione, ci consente di concludere che tali insiemi hanno lo stesso cardinale.

Ritorniamo agli insiemi di numeri. È facile mettere in corrispondenza l'insieme dei primi 100 numeri interi con quello dei primi cento numeri pari, secondo lo schema:

1, 2, 3, … 99, 100

2, 4, 6, … 198, 200

Questi due insiemi hanno la stessa taglia, cioè lo stesso cardinale.

Se questo pare andare da sé, sembrano comparire dei paradossi appena si applica la definizione a insiemi non finiti. Consideriamo, per esempio, da una parte l'insieme **N** di tutti gli interi; dall'altra parte, l'insieme **P** di tutti i numeri interi pari. È chiaro che li si possano mettere in corrispondenza biunivoca, secondo lo schema:

N: 1, 2, 3, … 99, 100, 101, …

P: 2, 4, 6, … 198, 200, 202, …

N e **P** hanno, dunque, lo stesso cardinale. Tuttavia, intuitivamente, **N** possiede più elementi: tutti i numeri pari appartengono a **N**, ma **N** contiene inoltre i numeri dispari. **P** è una parte (propria) di **N**, dal momento che ogni elemento di **P** appartiene anche a **N**. Non è paradossale concedere loro la stessa taglia? Ciò non equivale, come notava Galileo nel caso dei numeri quadrati, a considerare una parte tanto grande quanto il tutto?

La dimostrazione non è diversa da quella che prova che ci sono tanti multipli di un milione quanti numeri interi. A 1 corrisponde 1 milione, a 2 due corrisponde 2.000.000, a 3 corrisponde 3.000.000, ecc. Si può dire lo stesso delle potenze di 1 milione, anche se queste sembrano ancor più rare: a 1 corrisponde 1.000.000, a 2 corrisponde $(1.000.000)^2$, ovvero 10^{12}, a 3 corrisponde 10^{24}, e così via. Uno dei meriti di Cantor è stato quello di non lasciarsi bloccare da questa bizzarria: tutti questi insiemi hanno davvero lo stesso cardinale. Tanto peggio per l'intuizione se si sente frustrata!

Fino a qui, le nostre corrispondenze biunivoche si applicano tra l'insieme degli interi **N** e le sue parti infinite. Ma, come abbiamo visto, **N** è a sua volta parte di un insieme più vasto, quello dei numeri razionali **Q**. Che dire dei loro cardinali? Con un ragionamento non troppo diverso, Cantor dimostra che l'insieme **Q** possiede lo stesso cardinale di **N**! (figura 2.2).

La cardinalità dell'insieme dei razionali

Ricordiamoci che i numeri razionali sono quelli che possiamo rappresentare come rapporti (*frazioni*) di due numeri interi. Li possiamo scrivere tutti nel seguente modo sistematico:

Q: 1/1, 2/1, 1/2, 3/1, 1/3, 3/2, 2/3, 4/1, 1/4, 4/2...

Detto in altri termini, li possiamo disporre in una certa maniera, ordinarli. Una volta fatto questo, nulla impedisce di assegnare loro un numero (intero). Orbene, questo tipo di numerazione non è altro che una corrispondenza di ciascun razionale con un intero (il suo numero

nella successione ordinata). Così, i due insiemi **N** e **Q**, in corrispondenza biunivoca, hanno appunto lo stesso cardinale.
E tuttavia **Q** possiede molti elementi che non si trovano in **N**: ogni elemento di **N** è in **Q**, perché ogni numero intero può essere considerato una frazione. Ma **Q** contiene anche tutte le frazioni irriducibili, che non compaiono in **N**. Si può persino dimostrare che tra due qualsiasi interi successivi c'è un'infinità di razionali! Eppure, gli interi e i razionali hanno la stessa "taglia"...

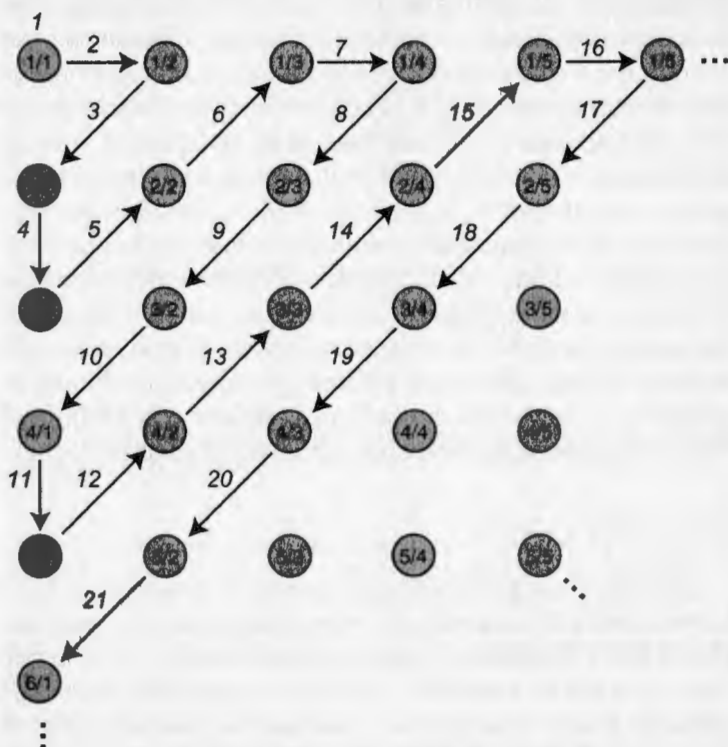



Figura 2.2 L'insieme numerabile dei razionali

Cantor dimostra che si possono disporre i numeri razionali (frazioni) in uno schema quadrato come quello illustrato in figura, associare così a ogni razionale un numero intero, seguendo il cammino indicato dalle frecce. L'insieme dei razionali è dunque numerabile!

Cantor battezza $\aleph_0$ (si legge *aleph* con zero) il cardinale di **N**. Poiché tale cardinale caratterizza l'insieme di cui si possono contare gli elementi (metterli in corrispondenza biunivoca con gli interi non è altro che *contarli*), questo primo numero infinito – certo il più intuitivo – viene talvolta designato con l'appellativo "il numerabile".

Il numerabile è anche il cardinale di **Q**. Eppure, gli interi non costituiscono che una parte infima di **Q**. Ecco, portato all'estremo, il paradosso della riflessività. Dedekind e Cantor ribaltano genialmente questa stravaganza apparentemente così contraria al buon senso, al punto di rappresentare un duro ostacolo all'accettazione degli infiniti. Anzi, la utilizzano per definire un insieme infinito: il cardinale di un certo insieme è infinito se questo insieme può essere messo in corrispondenza biunivoca con una delle sue parti non identica all'insieme stesso (questo è noto come principio di Dedekind); detto altrimenti, un insieme è infinito se questo insieme ha lo stesso cardinale di una delle sue parti (proprie). Il cardinale dell'insieme dei numeri interi ci ha fornito un primo infinito, $\aleph_0$. Ricorrendo all'insieme dei numeri razionali, pensavamo di averne introdotto un secondo, ma abbiamo appena mostrato che è uguale al primo! Si può andare più lontano? Si può definire un insieme più vasto di quello dei razionali? La tappa successiva del lavoro di Cantor lo conduce all'idea che si possano definire più cardinali infiniti differenti.

2.6.2 I reali e il continuo

I matematici conoscono molti insiemi di numeri, quello dei numeri interi, **N**, e quello dei numeri razionali, **Q**, sono tra i più semplici. Conosciamo anche numeri come π e $\sqrt{5}$ che non sono né interi né razionali – li diciamo, appunto, *irrazionali*, anche se si può, anzi si deve, calcolare con essi. L'insieme **R** dei numeri detti "reali" è formato dai razionali, dagli irrazionali algebrici e dagli irrazionali trascendenti. Gode di proprietà ben note ai matematici. Ha evidentemente un cardinale infinito, dal momento che contiene gli interi e i razionali. Ma tra i suoi elementi ci sono anche gli irrazionali, che non sono

elementi di **N** e nemmeno di **Q**. Questo non prova ancora che il cardinale di **R** sia superiore al numerabile. Si pone allora la domanda: il cardinale di **R** è lo stesso di quello di **N**?

Cantor riesce a rispondere alla domanda grazie al celebre metodo detto "della diagonale",[14] e dimostra l'impossibilità di

14. Nelle parole di Roger Penrose: "Il ragionamento [...] procede per mezzo di una *reductio ad absurdum*. Supponiamo che il risultato che cerchiamo di stabilire sia falso, cioè che l'insieme di tutti i numeri reali sia numerabile. In tal caso, i numeri reali compresi tra 0 e 1 saranno certamente numerabili, e noi avremo un *qualche* elenco che fornirà un accoppiamento biunivoco di tutti i numeri reali con i numeri naturali, come per esempio:

Numeri naturali		Numeri reali
0	–	0,**1**0357627183...
1	–	0,1**4**329806115...
2	–	0,02**1**66095213...
3	–	0,430**0**5357779...
4	–	0,9255**0**489101...
5	–	0,59210**3**43297...
6	–	0,636679**1**0457...
7	–	0,8705007**4**193...
8	–	0,04311737**8**04...
9	–	0,786350811**5**0...
10	–	0,4091673889**1**...
.		.
.		.
.		.

Ho contrassegnato in neretto le cifre sulla diagonale. Queste cifre sono, per questo particolare elenco,

1, 4, 1, 0, 0, 3, 1, 4, 8, 5, 1, ...

E il procedimento diagonale di Cantor consiste nel costruire un numero reale (compreso tra 0 e 1) il cui sviluppo decimale (dopo la virgola) differisca da queste cifre in ogni punto corrispondente. Per essere più precisi, diciamo che la cifra deve essere 1 ogni volta che la cifra diagonale è diversa da 1, e 2 ogni volta che la cifra diagonale è 1. In questo caso otteniamo il numero reale

0,21211121112...

Questo numero reale non può apparire nel nostro elenco poiché differisce dal primo numero nel primo decimale (la prima cifra dopo la virgola), dal secondo numero nel secondo decimale, dal terzo numero nel terzo decimale, ecc. Questa è una contraddizione, poiché il nostro elenco doveva contenere *tutti* i numeri reali compresi fra 0 e 1. Questa contraddizione stabilisce quello che noi stiamo tentando di dimostrare, ossia che *non* esiste una corrispondenza biunivoca fra i numeri reali e i numeri naturali e che, perciò, il numero dei numeri reali è in effetti *maggiore* del numero dei numeri razio-

una corrispondenza biunivoca tra **R** e **N**. Stando alla definizione, **R** e **N** non hanno lo stesso cardinale. Il cardinale di **R** è detto "potenza del continuo". Ci sono, dunque, almeno due infiniti differenti: il numerabile e il continuo. Cantor battezza questi numeri di tipo nuovo col nome di *transfiniti*.

2.6.3 La gerarchia degli infiniti

A questo punto, si pone la questione di sapere se esistono altri transfiniti. Anche in tal caso, la risposta di Cantor è affermativa. A partire da un insieme E qualsiasi, si può costruire un altro insieme che si indica con P(E), l'insieme delle parti (o "sottoinsiemi") di E. Prendiamo l'insieme {1, 2, 3}, insieme formato dai tre numeri 1, 2, 3. Questo insieme possiede tre elementi; il suo cardinale è dunque 3. Come sue parti (o sottoinsiemi) possiede anzitutto l'insieme che non contiene alcun elemento, detto insieme vuoto e indicato con ∅; poi gli insiemi costituiti da un solo elemento: l'insieme {1} che contiene il solo numero 1; e analogamente gli insiemi {2}, {3}. Possiede come parti anche gli insiemi che contengono due numeri: {1, 2}, {2, 3} e {1, 3}. Va contata, infine, come parte lo stesso insieme {1, 2, 3}. In tutto, abbiamo 8 "parti", o sottoinsiemi. Allora, l'insieme P({1, 2, 3}) delle parti di {1, 2, 3} ha per cardinale 8. In generale, per un insieme finito E di cardinale *c*, il cardinale di P(E) è 2^c.

Ora, prendiamo come punto di partenza l'insieme **N** degli interi. A prescindere dall'insieme vuoto {∅}, le sue parti più semplici sono composte da un solo elemento: per esempio, l'insieme che contiene il solo numero 1789, insieme che scriviamo {1789}, è una parte di **N**. Si possono successivamente definire le parti che contengono due elementi, per esempio, la parte {1789, 2005}, poi le parti contenenti 3, 4, ecc. elementi. Certe parti contengono esse stesse un numero infinito di elementi: è il caso dell'insieme dei numeri pari, di quelli che sono

nali e *non* è numerabile" (R. Penrose, *La mente nuova dell'imperatore*, citato in bibliografia, pp. 121-122. Vedi anche dello stesso autore, *Ombre della mente*, citato in bibliografia, pp. 102-103 e *La strada che porta alla realtà*, citato in bibliografia, pp. 367-371). [NdC]

dei quadrati perfetti, ecc. Ognuna di queste parti è un elemento di P(**N**), insieme delle parti di **N**.

Nel 1890 Cantor dimostra il suo teorema fondamentale: l'insieme delle parti di un insieme di cardinale c (finito o infinito) ha per cardinale 2^c, ed è strettamente più grande di c. Egli dimostra pure che l'insieme **R** dei reali può essere messo in corrispondenza biunivoca con l'insieme P(**N**) delle parti dell'insieme **N** degli interi. Di conseguenza, il cardinale dei reali – la potenza del continuo – è uguale a $2^{\aleph_0}$. Si badi che l'insieme degli irrazionali algebrici ha anch'esso la potenza del numerabile. Nell'insieme dei reali è dunque il sottoinsieme dei numeri trascendenti quello che ha una potenza strettamente superiore al numerabile.[15]

Eccoci ora con due transfiniti differenti e provvisti di un metodo (quello che consiste nel formare l'insieme delle parti di un insieme) che ci consente di costruire altri transfiniti. Cantor tenta allora di edificare un'autentica gerarchia delle totalità infinite. Ci sono transfiniti costruiti in un altro modo? Quanti ce n'è in tutto? E come il continuo si colloca nella sequenza dei transfiniti?

Tali questioni così ardue, non tutte risolte da Cantor stesso, daranno luogo a sviluppi fondamentali della matematica, in connessione con la teoria degli insiemi, l'assiomatica e la logi-

L'*Aleph*

Aleph, simbolo dei numeri transfiniti per i quali il tutto non è più grande di qualcuna delle sue parti, è il nome della prima lettera dell'alfabeto ebraico, considerata "lingua sacra". Come nel celebre racconto di Borges, anche qui il ricorso al simbolo "non sembra casuale. Per la Cabala, quella lettera rappresenta l'*En Soph*, l'illimitata e pura divinità".[16]

15. Anche il teorema fondamentale si dimostra col teorema della diagonale (vedi la nota n. 14). Per tutti questi vari risultati vedi R. Penrose, *La strada che porta alla realtà*, cit., pp. 368-371. [NdC]

16. J.L. Borges, "L'Aleph", in *L'Aleph*, in *Tutte le opere*, cit., vol. I, p. 900. [NdC]

ca. Ma, intanto, il lavoro di Cantor non riesce a evitare attacchi e critiche. L'influente matematico Leopold Kronecker (1823-1891) bloccherà il manoscritto di Cantor, ritardandone la pubblicazione nel cosiddetto *Journal de Crelle*, uno dei più prestigiosi periodici di matematica.

È in questo stesso articolo che Cantor ottiene un altro risultato stupefacente. Consideriamo un qualsiasi insieme E, definiamo E × E come l'insieme delle coppie ordinate di E. Per esempio, se E è l'insieme **R** dei numeri reali, che dall'epoca di Cartesio e di Fermat possiamo identificare con quello dei punti di una retta, **R** × **R**, che possiamo anche scrivere $\mathbf{R}^2$, può essere identificato con l'insieme dei punti del piano (dal momento che si può identificare un punto del piano con la coppia formata dalla sua ascissa e dalla sua ordinata). Orbene, Cantor dimostra in modo generale che l'insieme E e l'insieme E × E hanno lo stesso cardinale. Detto in altri termini, dimostra che l'insieme dei punti di una superficie possiede la stessa "taglia" dell'insieme dei punti di un segmento di retta. Eppure, intuitivamente, quest'ultimo sembra più piccolo dell'altro! E un ragionamento analogo mostra che capita lo stesso per i punti dello spazio a tre dimensioni...

Cantor è sbalordito dal suo stesso risultato: "Lo vedo, ma non lo credo!", scrive a Dedekind. Toccherà a quest'ultimo esplicitare la natura di tale paradossale teorema, mostrando che esso non rimette in causa la geometria, come certi matematici credevano invece dopo la dimostrazione di Cantor. La teoria dei trasfiniti si rivela perfettamente compatibile col resto della matematica.[17]

Ancora una volta si constata come l'intuizione appaia disarmata di fronte alle proprietà dell'infinito. La grande forza di Cantor è stata quella di accettare queste nuove verità senza bollarle come paradossali, sapendo invece utilizzarle come base inedita per articolare la realtà dell'infinito attuale. David

17. Per questo ultimo punto e per lo schema della stessa dimostrazione cantoriana del suo "incredibile" risultato vedi, per esempio, S. Bozzi, C. Mangione, *Storia della logica. Da Boole ai giorni nostri*, citato in bibliografia, pp. 314-317. [NdC]

Hilbert, affascinato dall'opera cantoriana, vi scorgerà l'avvento dell'"autentico infinito attuale". Questo successo del pensiero confuta un presupposto ancora accettato dai filosofi del nostro Novecento: "Il rapporto con l'infinito non può, certo, dirsi in termini di esperienza – infatti l'infinito eccede il pensiero che lo pensa".[18]

Cantor, legislatore dell'infinito

Leonardo Sinisgalli (1908-1981), poeta, ingegnere, pittore e critico d'arte, ha riassunto in modo perfetto l'immensa opera di Cantor in queste pagine del suo *Horror vacui* (1945): "È merito di Giorgio Cantor averci fatto sentire lo spessore, la densità, la potenza del *continuo*, la misura dell'infinito, l'ordine dell'insieme dei numeri. La strada che dal nulla porta all'unità, dall'unità al molteplice, fino a Dio, oggi noi possiamo percorrerla per la prima volta senza il pericolo di trovare dei salti o delle lacune. Nessun numero può sfuggirci più. Cantor ha trovato il posto per ciascuno. Ha ordinato i punti di un segmento, di una linea, di una superficie, di uno spazio, e ha trovato per via di corrispondenze la misura, il confronto di queste infinità. Egli ha cominciato col considerare l'insieme dei numeri interi, l'insieme dei numeri pari, l'insieme dei numeri primi: ha trovato che hanno la stessa potenza, la potenza del *numerabile*, lo stesso numero cardinale transfinito che Cantor ha chiamato *Aleph-zero*. [...] Cantor ha dimostrato che anche l'insieme dei numeri razionali e quello dei numeri algebrici hanno la potenza del numerabile, ma l'infinità dei numeri algebrici è infinitesima rispetto all'infinità dei numeri trascendenti. I numeri algebrici e trascendenti formano l'insieme dei numeri reali e Cantor ha dimostrato che questo insieme ha la potenza del *continuo*, espressa col secondo numero cardinale transfinito. [...] Giorgio Cantor ha trovato una legge di generazione della moltitudine dei numeri ordinali finiti e transfiniti, ha creato una dinastia, quella degli *Aleph*, con l'aiuto di due principi, l'uno immanente (additivo) l'altro trascendente (passaggio al limite). Cantor legislatore dell'infinito".[19]

18. E. Lévinas, *Totalità e infinito*, cit., p. 23.
19. L. Sinisgalli, *Horror vacui*, citato in bibliografia, pp. 63-65.

2.7 L'ipotesi del continuo

Come abbiamo visto, l'infinito degli interi è indicato con $\aleph_0$: è il primo numero transfinito. L'infinito immediatamente successivo viene indicato con $\aleph_1$; c'è quindi $\aleph_2$, ecc.

D'altro canto, sappiamo costruire in modo esplicito una sequenza di numeri transfiniti considerando il numero cardinale dell'insieme delle parti dell'insieme dato. Se anche in questo caso partiamo dall'insieme degli interi, la scala degli infiniti che così costruiamo è allora $\aleph_0$, $2^{\aleph_0}$, $2^{2^{\aleph_0}}$, ecc.

Abbiamo anche dimostrato che la potenza del continuo è uguale a $2^{\aleph_0}$, che è strettamente superiore a $\aleph_0$. Anche gli altri *Aleph* sono superiori a $\aleph_0$. E allora queste due sequenze di transfiniti come si collocano l'una rispetto all'altra? In particolare, qual è il posto della potenza del continuo nella gerarchia degli infiniti?

La questione di sapere se ci sia qualcosa, o niente, tra $\aleph_0$ e $2^{\aleph_0}$ equivale a chiedersi se $\aleph_1$ (per definizione, l'infinito immediatamente superiore a $\aleph_0$), sia uguale o meno a $2^{\aleph_0}$. Il caso dell'uguaglianza è noto come *ipotesi* (cantoriana) *del continuo*. L'enunciato che per ogni i, $\aleph_{i+1} = 2^{\aleph_i}$ è detta *ipotesi generalizzata del continuo*.

Nell'anno 1900 Hilbert indicò la dimostrazione, o la refutazione, di questa ipotesi come il numero 1 dei problemi che sarebbe stato essenziale risolvere in matematica. Cantor aveva esaurito le sue energie nel cercare di risolvere la questione, ma non ce l'aveva fatta. Questo scacco aveva i suoi motivi...

La soluzione, definitiva e inattesa, è stata trovata qualche decennio dopo. Nel 1938 il logico Kurt Gödel (1906-1978) nativo di Brno in Moravia, e formatosi nella "Grande Vienna", esibisce la prova dell'impossibilità di dimostrare che, nel quadro della teoria degli insiemi, l'ipotesi generalizzata del continuo è falsa (ovviamente, ciò vale anche per la sua versione particolare). Nel 1963 Paul J. Cohen mostra a sua volta l'impossibilità di dimostrare che è vera l'ipotesi del continuo. In altri termini, l'ipotesi cantoriana del continuo non può essere né provata né refutata dagli assiomi della teoria degli in-

siemi.[20] Si tratta di un *enunciato indecidibile*. La teoria non è autocontraddittoria; semplicemente, non ci dice nulla sulla questione. L'ipotesi cantoriana del continuo è un'ipotesi indipendente (e lo stesso dicasi della sua versione generalizzata): si può tanto ammetterla quanto ammettere la sua negazione, senza contraddire la teoria degli insiemi. Possiamo dunque supporre che la potenza del continuo sia uguale a $\aleph_1$, ma anche a $\aleph_2$, a $\aleph_3$, ecc.

Questa situazione non soddisfa parecchi matematici.[21] Non diversamente da quanto pensavano Cantor e Gödel, costoro sono dell'opinione che una "buona " teoria degli insiemi dovrebbe dirci davvero se l'ipotesi del continuo è vera o falsa!

Una prima linea di ricerca consiste nel rimettere in questione l'abituale teoria degli insiemi, che in genere indichiamo come ZF, in onore dei due matematici Ernst Zermelo (1871-1953) e Abraham Fraenkel (1891-1965) che l'hanno messa a punto nei primi decenni del Novecento. Tuttavia, le varie teorie alternative che sono state avanzate non hanno ottenuto l'attenzione della stragrande maggioranza dei matematici, che preferiscono attenersi alla semplicità di ZF e non ritengono gravissima la situazione prodotta dall'ipotesi del continuo.

Una seconda linea di ricerca ammette invece che ZF sia soddisfacente, ma sottolinea il fatto che è incompleta: mancherebbero in particolare quegli assiomi che sarebbe sufficiente aggiungere affinché o l'ipotesi del continuo o la sua negazione diventasse dimostrabile. Lo studio, in logica matematica, di quelli che vengono chiamati i "grandi cardinali" faceva inizialmente sperare di fornire la soluzione dell'enigma. Ma i matematici si sono ritrovati con dei nuovi infiniti, la cui taglia gigantesca avrebbe dato le vertigini allo stesso Cantor!

20. Una classica esposizione di questi risultati si trova nel libro dello stesso Paul J. Cohen, *La teoria degli insiemi e l'ipotesi del continuo*, citato in bibliografia. [NdC]

21. Si riprende qui l'eccellente articolo di J.-P. Delahaye, "L'infini est-il paradoxal en mathématiques", in AA.VV. *Les infinis, Pour la Science*, dossier spécial, citato in bibliografia.

Enunciati indecidibili

Nel 1931 Gödel rivoluziona la matematica dimostrando che certi enunciati, veri per i numeri naturali, sono indimostrabili. Si potrebbe immaginare che se si scopre un teorema vero e indimostrabile, basta assumerlo come nuovo assioma. Ma non va bene. Gödel, infatti, mostra che in tal caso restano indimostrabili altre proposizioni vere per quei numeri. Il teorema di Gödel, detto "d'incompletezza", sembra dare il colpo di grazia al tentativo di David Hilbert di formalizzare completamente la matematica, e genera la nozione di enunciati "indecidibili". Nel quadro di un dato sistema assiomatico – per esempio, il quadro dell'aritmetica che consente di formulare gli enunciati che vertono sui numeri interi, di effettuare calcoli e dimostrazioni pertinenti a tali numeri – quel che ha dimostrato Gödel è che esistono certi enunciati di cui è impossibile dimostrare che siano veri o falsi, anche se essi hanno il loro significato. E questo non perché noi non siamo capaci di farlo; piuttosto, è la stessa struttura del sistema che è la causa di tale impossibilità. Detto in altre parole, il sistema concede una certa libertà: si può tanto "decidere" che l'enunciato è vero tanto decidere che è falso. Entrambe le possibilità corrispondono a due prolungamenti possibili del sistema originario.
Per quanto riguarda i numeri transfiniti, il risultato di Gödel e quello di Cohen, presi insieme, dimostrano che l'ipotesi del continuo è indecidibile: si può "assumere" che essa sia vera; ma si può, altrettanto legittimamente, "assumere" che sia falsa, e continuare a fare matematica a partire dall'una o dall'altra ipotesi, senza giungere a una contraddizione.
La nozione di incompletezza e quella di indecidibilità sono al centro di una serie di dibattiti, a un tempo matematici, logici e filosofici, che è lungi dall'essere esaurita. Queste nozioni sono strettamente collegate alla teoria degli insiemi; ma, più di recente, è emersa anche la connessione con i concetti di algoritmo, di informazione, di calcolabilità.

Gli assiomi relativi ai grandi cardinali sono degli enunciati che riguardano numeri "mostruosamente" grandi. Si è provato che si possono aggiungere senza timore di contraddire ZF, e inoltre essi obbediscono a una sorta di gerarchia che li presenta come un'estensione naturale di ZF. In questo modo, l'origi-

naria teoria cantoriana sembrerebbe venire prolungata grazie all'aggiunzione di nuovi assiomi naturali. Visto sotto questa prospettiva, l'infinito attuale non è né paradossale né logicamente insoddisfacente, anche se, per qualche momento, l'indecidibilità dell'ipotesi del continuo aveva alimentato qualche sospetto. È plausibile, invece, che l'infinito attuale sia verosimile e coerente. Ci imbattiamo qui in una pregnante analogia con la fisica, ove, come abbiamo visto nel Capitolo 1, si è dovuta rivedere la nostra concezione del tempo e dello spazio alla luce della relatività. A dispetto delle apparenze, questa, però, non è affatto paradossale. La relatività ci ha così imposto di rimodellare le nostre idee circa lo spazio e il tempo, e a chi accetta questa profonda riforma non si può opporre alcun paradosso. La stessa cosa avviene in matematica: le situazioni logicamente insoddisfacenti che si crede di avere identificato (analoghe al "paradosso dei gemelli"[22] di Langevin) non ci appariranno più tali a misura che il nostro spirito accetterà pienamente il nuovo universo concettuale plasmato dai matematici dell'infinito attuale.

22. Si considerino due gemelli, A e B: A rimane a Terra, mentre B parte per un viaggio a bordo di una navicella spaziale, che si muove a una velocità prossima a quella della luce, e ritorna sulla Terra dopo qualche anno. A causa della dilatazione del tempo, descritta da Einstein nella teoria ristretta della relatività (1905), da Terra il tempo di B scorrerà più lento, e quindi B al suo ritorno troverà A più vecchio. Viceversa, visto dalla navicella spaziale, sarà il tempo di A a essere rallentato, e quindi al suo ritorno B dovrebbe trovare A più giovane. In realtà, come rilevò lo stesso Einstein, il paradosso non sussiste, in quanto le due prospettive, quella di A e quella di B, non sono completamente simmetriche. Per compiere il suo viaggio, B deve accelerare partendo da Terra, viaggiare a velocità costante per un certo periodo, quindi fermarsi, invertire la rotta, accelerare di nuovo, volare a velocità costante e infine toccare nuovamente il suolo sulla Terra. A, invece, rimane immobile. Le manovre di B precludono la simmetria tra le due serie di osservazioni. Ma il principio di relatività si applica al solo moto uniforme. Tenendo conto di tutto ciò, B al suo ritorno troverà A più vecchio. [NdC]

2.8 Ancora degli infiniti matematici

La matematica è la scienza dell'infinito.
HERMANN WEYL

2.8.1 L'infinito e la prospettiva

La scienza della prospettiva, scaturita dalla geometria pratica e dalla teoria delle coniche di Apollonio di Perga (ca. 262-180), comincia con la questione della rappresentazione della terza dimensione in un piano. La svolta venne segnata, nel Rinascimento, dall'invenzione della prospettiva lineare. È grazie a questa che l'infinito attuale geometrico ha trovato una rappresentazione nel disegno, ancor prima di essere stato pensato! Lo troviamo ridotto a un punto sull'orizzonte; ma molto spesso ci viene celato da un muro o da una porta. La prospettiva lineare consiste nel proiettare sul piano del quadro i raggi rettilinei e immaginari che vanno dall'oggetto che si vuol rappresentare all'occhio del pittore – occhio che immaginiamo anch'esso ridotto a un punto. Si chiama anche *prospettiva centrale* o *proiezione conica*: l'occhio costituisce il centro *O* di questa proiezione, e tutti i raggi che passano per *O*, uscendo dai punti situati sul contorno dell'oggetto, formano allora un cono di vertice *O*. Nella prospettiva lineare, un insieme di rette parallele dello spazio ha per proiezione un insieme di rette che, in generale, concorrono in un punto detto "punto di fuga centrale" – definito come tale nel 1435 da Leon Battista Alberti. Sono i pittori e gli architetti del Quattrocento italiano, come Filippo Brunelleschi (1377-1446), Alberti (1404-1472) e Piero della Francesca (1416-1492) che hanno codificato le regole della costruzione della prospettiva. Hanno inaugurato una pratica geometrizzata della prospettiva, la cui grande adeguatezza alla visione umana e le cui conseguenze pratiche le hanno assicurato un lungo futuro.

Così facendo, definendo un punto in cui concorrevano rette in realtà parallele e impiegandolo nel disegno (figura 2.3), gli artisti del Rinascimento hanno dato il primo esempio di rap-

presentazione visuale di un infinito attuale. Il punto di fuga rappresenta nel quadro un punto che, in realtà, è situato all'infinito, là dove le rette parallele "si incontrano". In tal modo, l'infinito geometrico acquisisce uno spessore umano, un'evidenza percepibile. L'infinito potenziale dei filosofi si è trasformato nell'infinito attuale dei geometri...

Questo emergere dell'infinito attuale ha condotto, agli inizi del Seicento, a una rivoluzione nel campo della stessa geometria, con Girard Desargues (1591-1661), matematico di Lione che conferisce veste formale al fatto che il parallelismo è la stessa cosa che incontrarsi all'infinito.

Le scoperte di Desargues hanno reso possibile una teoria generale delle proiezioni. A sua volta, la geometria proiettiva ha condotto a scorgere la possibilità di geometrie non euclidee (e qui si incontrano ancora rappresentazioni dell'infinito), e a concepirne dei modelli "interni" alla stessa geometria di Eucli-

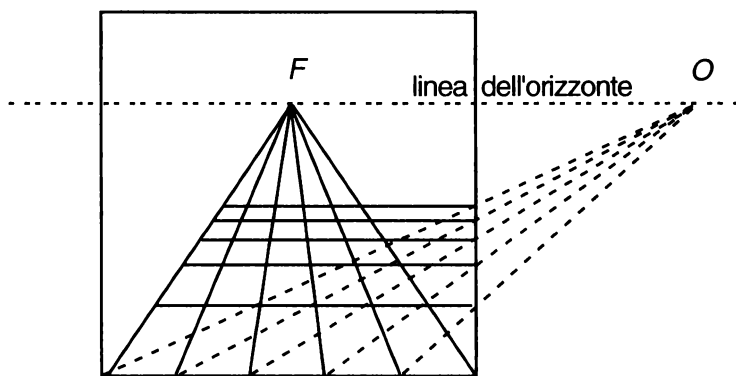



Figura 2.3 La prospettiva centrale

Una quadrettatura vista da sopra nella ingegnosa rappresentazione di Leon Battista Alberti. Anzitutto, si traccia un fascio di rette parallele, ma che convergono al principale punto di fuga *F* situato sulla linea dell'orizzonte. Si sceglie poi sulla linea dell'orizzonte un punto *O* a una certa distanza *d* dal quadro (*d* è la distanza tra l'occhio del pittore e il quadro). Da *O* si tracciano i segmenti di retta che vanno fino ai punti di partenza delle rette convergenti in *F*. L'intersezione di questi segmenti con il bordo verticale retto del quadro fornisce i livelli principali cui devono essere collocate le linee parallele orizzontali della quadrettatura.

de.[23] Per esempio, nel modello di Poincaré per il "piano iperbolico", l'infinito è riportato a distanza finita identificando i punti all'infinito con quelli di una circonferenza (figura 2.4).

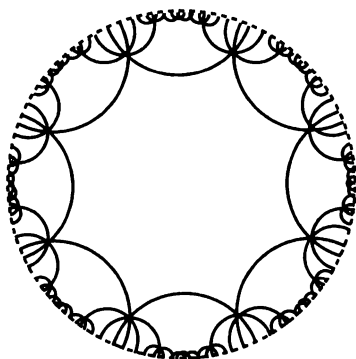



Figura 2.4 La rappresentazione proiettiva di Poincaré del piano iperbolico

L'interno del cerchio rappresentato nella figura corrisponde al piano e le rette del piano iperbolico vengono qui rappresentate da archi di cerchio ortogonali al contorno. Si tratta di un modello euclideo di una geometria non euclidea (o "modello interno"), dal momento che per un punto esterno a una retta passa un'infinità di rette parallele alla retta data.

2.8.2 Gli ordinali transfiniti

Abbiamo visto come Cantor sia stato capace di trattare i cardinali degli insiemi infiniti come oggetti ben definiti. Ma per sviluppare un'autentica "aritmetica dell'infinito", cioè un'estensione ai numeri infiniti delle regole di calcolo che vengono applicate agli interi quando si misura il finito, bisogna distinguere due tipi di numeri infiniti: i *cardinali* e gli *ordinali*.

Gli ordinali ci servono, per così dire, per misurare la taglia degli insiemi quando questi sono ordinati. La successione degli ordinali è una successione degli interi ordinati $0 < 1 < 2 < 3\ldots$, purché si rispetti la seguente proprietà: "In qualsiasi insieme di ordinali, c'è un ordinale più piccolo". Questa proprietà è vera

23. Vedi J.-H. Poincaré, *La scienza e l'ipotesi*, citato in bibliografia, in particolare pp. 65-87. [NdC]

per gli interi (nell'insieme degli interi *strettamente* compresi tra 0 e 5, l'intero più piccolo è 1), ma non per i reali (1,01 è maggiore di 1,000001 che è maggiore a 1,000000001, ecc.). Consideriamo allora la successione degli ordinali infiniti (la cui esistenza è stata dimostrata da Cantor). Per definizione esiste il più piccolo ordinale infinito, che indichiamo con ω, e che viene identificato col più piccolo dei cardinali infiniti, cioè con $\aleph_0$. Analogamente, esiste il più piccolo ordinale maggiore di ω, e lo indichiamo $\omega + 1$; poi c'è $\omega + 2$, ecc. Si giunge così a $\omega + \omega$, che possiamo scrivere anche $2\,\omega$, e si continua con $2\omega + 1$, ... Applicando così agli ordinali infiniti le stesse regole del calcolo (addizione, moltiplicazione, elevazione a potenza) che servono a misurare il finito, si ottiene ω^2, ω^3, ..., ω^ω, *ad infinitum*... (figura 2.5).

INTERI ORDINALI

1 2 3 ... ω $(\omega+1)$ $(\omega+2)$ ... 2ω $(2\omega+1)$ ... 3ω ... ω^2 (ω^2+1) ... $(\omega^2+\omega)$ ... $2\omega^2$ ... ω^3 ... ω^ω ...

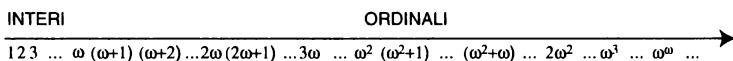



Figura 2.5 La successione degli ordinali

La successione degli ordinali è una continuazione della successione degli interi ordinati secondo grandezza.

2.8.3 Le successioni di Goodstein[24]

Uno degli oggetti più strabilianti in matematica, all'interfaccia di finito e infinito, è stato scoperto nel 1944 dal logico inglese Reuben Louis Goodstein.[25]

Un numero intero viene scritto solitamente in base 10 (sistema decimale): è stato espresso come una somma di potenze di dieci, moltiplicate da interi compresi tra 0 e 9. Per esempio, l'intero 266 viene così scomposto:

$$266 = 2 \times 10^2 + 6 \times 10^1 + 6 \times 10^0 \text{ (sottintendendo che } a^0 = 1\text{)}.$$

24. Si riprende qui l'articolo di P. Dehornoy, "L'infini est-il nécessaire?", in AA.VV. *Les infinis*, cit.

25. R.L. Goodstein, "On the restricted ordinal theorem", in *Journal of Symbolic Logic*, 9, 1944, pp. 33-41. [NdC]

I computer, invece, calcolano in base 2. L'intero che si scrive 266 in base 10 può essere espresso anche in potenze di 2:

$$266 = 2^8 + 2^3 + 2^1.$$

Si chiama "sviluppo in base p iterata" una procedura analoga ove si scrivono in base p anche gli esponenti, poi, nella stessa base gli esponenti degli esponenti, ecc. Per esempio, lo sviluppo di 266 in base 2 iterata si scrive:

$$266 = 2^{2^{2+1}} + 2^{2+1} + 2$$

Definiamo ora un'operazione – detta *dilatazione* – che, a partire da un intero n qualsiasi detto "seme", si effettua in due tappe: si scrive n in base p iterata, poi si sostituisce ovunque p con $p + 1$: la procedura è elementare. Dilatiamo l'intero 266. La sua prima dilatazione, $d_2(266)$, si ottiene sostituendo tutti i 2 con dei 3, ovvero:

$$d_2(266) = 3^{3^{3+1}} + 3^{3+1} + 3$$

Si tratta di un intero la cui scrittura in base 10 ha già... 38 cifre (è dunque dell'ordine di 10^{37}). Una dilatazione genera dunque un numero molto più grande che l'intero di partenza.

Muniti di questi strumenti abbastanza semplici, definiamo ora una successione di Goodstein $g_p(n)$. Viene costruita a partire da un intero n qualsiasi (il seme), dilatando questo intero e poi sottraendo 1, ecc. Per esempio, prendiamo il solito 266 come seme. Allora, $g_2(266) = d_2(266) - 1$. Abbiamo visto che quel tale numero ha 38 cifre in base 10.

Il termine successivo $g_3(266)$ è uguale a:

$$d_3(g_2(266)) - 1 = d_3(3^{3^{3+1}} + 3^{3+1} + 2) - 1 = 4^{4^{4+1}} + 4^{4+1} + 1$$

Si tratta di un numero a 616 cifre in base 10. Proseguendo, si constata che $g_4(266)$ ha circa 10.000 cifre in base 10. A prima vista, la successione di Goodstein di seme 266 sembra tendere rapidissimamente all'infinito, e questo parrebbe il caso di qualsiasi successione di Goodstein generata da un altro seme...

Tuttavia, il teorema di Goodstein dichiara che, qualunque

sia il seme n, la successione di Goodstein corrispondente finisce per raggiungere il valore 0.

È difficile da credere? Lo si dimostra facilmente per i primi semi. Nel caso del seme 2 abbiamo $g_4(2) = 0$; per il seme 3, $g_6(3) = 0$. Potremmo pensare che ciò capiti per il fatto che, per semi così piccoli, le dilatazioni non abbiano il tempo di entrare in azione. È a partire dal seme 4 che le cose si fanno interessanti. Una dimostrazione un po' più complicata fornisce la prova che la successione di Goodstein di seme 4 raggiunge il valore 0 ($g_p(4) = 0$) dopo un numero strabiliante di tappe: abbiamo $p = 3 \times 2^{402.653.211} - 2$, un intero la cui scrittura in base 10 ha circa 130 milioni di cifre.

Questo fenomeno – che dovremmo considerare almeno paradossale – è dovuto certo alla presenza del fattore –1. Per quanto appaia microscopico in rapporto agli enormi numeri generati mediante dilatazione, finisce per rosicchiare la crescita della successione, al punto di farla decrescere fino a raggiungere il valore zero al termine di un numero *finito* di operazioni.

Si ha la sensazione che, per semi molto grandi, la dimostrazione sfugga alla nostra portata. È forse impossibile dimostrare il teorema di Goodstein nel caso generale?

No. Una dimostrazione che vale per qualsiasi seme c'è davvero; ma – e qui la cosa comincia a darci le vertigini – è necessario uscire dal quadro dell'aritmetica e ricorrere agli ordinali transfiniti. Dunque, siamo in presenza di una proprietà aritmetica – dal momento che il teorema di Goodstein si riferisce solo a numeri interi e alle loro quattro operazioni elementari (addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione) – la cui dimostrazione, però, si basa sull'impiego di oggetti infiniti.

Possiamo allora chiederci se, con un po' di astuzia, non potremmo escogitare un'*altra* dimostrazione che, questa volta, non ricorrerebbe all'infinito, ma solo a un ragionamento per ricorrenza.[26] La risposta è no! Un teorema dimostrato nel

26. Presa qualunque proprietà P definita sui numeri naturali (**N**), se essa vale per 0, e se per ogni x – supposto che valga per x – vale anche per $x + 1$, allora P vale per tutti i numeri naturali. [NdC]

1981 da Laurence Kirby e Jeffrey Paris[27] enuncia che, qualunque cosa ci possiamo immaginare, non riusciremo mai a dimostrare il teorema di Goodstein per ricorrenza, cioè servendoci solo dei numeri interi e delle quattro operazioni elementari.

È questo risultato che costituisce la specificità del teorema di Goodstein. Rappresenta esattamente lo scarto tra l'infinito potenziale, presente nell'aritmetica (ove il principio di ricorrenza postula l'esistenza di una successione di interi senza fine) e l'infinito attuale (presente negli ordinali transfiniti). È pure l'esempio più semplice di una proprietà aritmetica non dimostrabile a partire dagli assiomi dell'aritmetica stessa: in altri termini, ecco una magnifica illustrazione del teorema di incompletezza di Gödel[28] (§ 2.7).

In conclusione, solo l'infinito permette di dimostrare il teorema di Goodstein che pure verte solo su numeri interi. La cosa costituisce un argomento potente a favore dell'impiego dell'infinito in matematica: contrariamente a quanto sostengono gli intuizionisti (§ 2.9), faremmo un grave sbaglio a privarci di una tale possibilità...

2.8.4 I numeri non standard

I transfiniti sono degli infiniti che possiamo manipolare, e con i quali possiamo fare dei calcoli. Però, la loro natura differisce da quella dei numeri che incontriamo di solito. Per esempio, non si può determinarne gli inversi come si fa con i numeri che ci sono più familiari.[29] E allora i matematici hanno esco-

27. L.A.S. Kirby, J.B. Paris, "Accessibile independence results for Peano arithmetic", in *Bulletin of the London Mathematical Society*, 14, 1982, pp. 285-293. [NdC]

28. Per una presentazione del teorema di Goodstein come un modo per "apprezzare la pertinenza del teorema di Gödel al nostro modo di pensare, anche nel caso del pensiero matematico" vedi R. Penrose, *Il grande, il piccolo e la mente umana*, citato in bibliografia, pp. 187-192. [NdC]

29. Come d'uso, dato un numero a (per esempio, un numero reale) diverso da zero, si denota come inverso o reciproco di a, $1/a$, il numero x tale che $ax = xa = 1$. Per esempio, l'inverso, o reciproco, di 3 è $1/3$, il reciproco di $\sqrt{2}$ è $1/\sqrt{2}$, ovvero $\sqrt{2}/2$, ecc. Sulla possibilità di invertire "l'infinitamente grande" in modo che sia "possibile calcolare con l'infinitamente piccolo"

gitato degli altri infiniti: la cosiddetta *teoria non standard* definisce numeri infiniti con proprietà analoghe a quelle degli interi e dei razionali.

I numeri non standard sono stati introdotti negli anni Sessanta del Novecento dal matematico Abraham Robinson (1918-1974). Questi era interessato a un modello (nel senso tecnico della logica matematica) dell'aritmetica che contenesse i numeri interi, ma anche altri numeri supplementari, interpretabili come "numeri infinitamente grandi non standard". Questi ultimi possono essere manipolati e obbediscono a tutte le regole del calcolo, senza che alcuna procedura infinitaria venga chiamata in causa. Vedremo che si comportano come i grandi infiniti attuali.

Robinson definisce anche i loro inversi, che appaiono come "numeri infinitamente piccoli non standard" (figura 2.6). Essi obbediscono a tutte le regole del calcolo infinitesimale, senza che ci sia mai bisogno di ricorrere ai limiti per giustificarli. Per esempio, se ne può sommare quanti se ne vuole, ma non si otterrà mai un numero reale standard, cioè non infinitesimo.

Il notevole interesse di queste ricerche deriva dall'esistenza di una corrispondenza tra gli infiniti grandi o piccoli introdotti mediante passaggio al limite e i numeri non standard, grandi o piccoli. Questa corrispondenza si estende alle dimostrazioni. Per prima cosa, tutto ciò ci rassicura sulla legittimità del calcolo con queste entità non standard – il che, ovviamente, non ci vieta di interrogarci circa lo statuto entro la matematica di questi nuovi oggetti. In secondo luogo, tutto questo ci offre anche delle possibilità concrete. È stato provato, in modo molto generale, che ogni risultato dimostrato utilizzando i numeri non standard ha la sua controparte con gli infiniti classi-

aveva richiamato l'attenzione Bolzano nel § 30 dei *Paradossi* (ed. cit., pp. 68-69). Da parte sua, Georg Cantor aveva escluso drasticamente "come vano" qualunque tentativo mirante a conferire una qualche "attualità" all'infinitamente piccolo concepito come reciproco dell'infinitamente grande. Sul superamento del divieto cantoriano segnato dalla analisi non standard di Robinson vedi, per esempio, J. Petitot, "Infinitesimale", in *Enciclopedia*, vol. VII, Einaudi, Torino 1979, pp. 443-521. [NdC]

ci. Ma le dimostrazioni che impiegano le entità non standard sono molto più semplici e comode, perché questi numeri non standard si possono manipolare come i numeri abituali. È dunque inutile affannarsi troppo, ricorrendo ai limiti delle successioni: le entità non standard danno buona prova di sé come potente strumento di dimostrazione circa l'infinito.

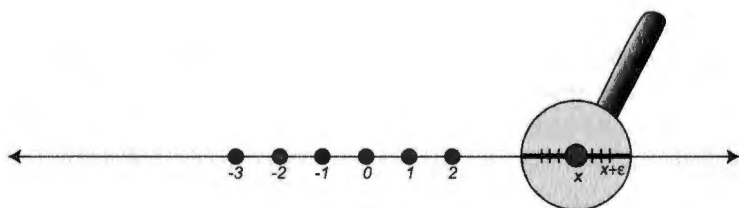



Figura 2.6 Densità dei reali non standard

I numeri reali – che contengono gli interi, i razionali e gli irrazionali – possono venir rappresentati dai punti di una retta. L'analisi non standard porta a immaginare intorno a ciascun reale x un "alone" di numeri non standard di tipo $x + \varepsilon$, con ε infinitamente piccolo.

2.8.5 Gli iperinsiemi

Una procedura dello stesso tipo ha portato a completare la teoria degli insiemi con l'introduzione dei cosiddetti *iperinsiemi*.[30] Poco dopo che era stata strutturata la teoria degli insiemi, nei primi anni del Novecento, il logico e filosofo Bertrand Russell (1872-1970) enunciò un paradosso divenuto poi celeberrimo. Si comincia col considerare gli "insiemi che non sono elementi di se stessi", e se ne forma l'insieme R, cioè l'insieme degli "insiemi che non sono elementi di se stessi". Ed ecco il problema: R è un elemento di se stesso? Un ragionamento logico elementare mostra che la domanda non può avere risposta né positiva né negativa. Questo paradosso traduce nel linguaggio degli insiemi il classico "paradosso del mentitore" che *dichiara* di essere un mentitore: se è veramente mentitore, mente: dun-

30. Vedi per esempio J.-P. Delahaye, *Pour la Science*, 195, gennaio 1994.

que, non è mentitore; e se non è mentitore dice la verità, dunque, mente! L'antinomia, detta *di Russell*, scosse notevolmente almeno una parte della comunità dei matematici. La risposta è che R non può essere considerato come un insieme. Più in generale, il riesame della questione portò a una nuova formulazione della teoria degli insiemi (appunto, l'assiomatica di Zermelo e di Fraenkel, § 2.7), più restrittiva, in quanto vietava di considerare come insiemi certi "raggruppamenti" o "classi" che *a priori* sembravano poterlo essere. Per esempio, non può esserci un "insieme di tutti gli insiemi", e nemmeno l'insieme R degli insiemi che non sono elementi di se stessi.

All'assiomatica ZF, John von Neumann (1903-1957) doveva aggiungere "l'assioma di fondazione", limitando ulteriormente la categoria degli oggetti che è lecito considerare come insiemi. Per esempio, questo assioma elimina la possibilità di insiemi che contengano se stessi. Orbene, è anche possibile non accettare quest'ultimo assioma, e ammettere invece l'esistenza di insiemi che appartengono a se stessi. Questi nuovi oggetti di cui si legittima così l'esistenza (gli insiemi "appartenenti a se stessi") sono detti *iperinsiemi*. Esiste, per esempio, un iperinsieme che possiede un solo elemento, costituito da se stesso. Questa nuova teoria può sembrare poco conforme all'intuizione, ma è stato mostrato che essa è coerente e che non conduce ad alcuna contraddizione logica. Ha anche dato prova di utilità pratica, tipicamente riguardo a certi problemi di informatica.

Sotto un certo profilo, gli iperinsiemi richiamano gli infiniti attuali: non li possiamo cogliere intuitivamente, ma li possiamo perfettamente concettualizzare e manipolare. Esistono veramente? In un caso come nell'altro, la questione resta aperta: dipende soprattutto dal significato che si è disposti a dare alla parola *esistere*.

2.8.6 Giochi finiti, giochi infiniti

Da tempo, la convergenza delle serie o degli integrali si presta a un'interpretazione geometrica che potrebbe sembrarci paradossale. Consideriamo la curva di equazione

$y = f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$, rappresentata in un sistema di riferimento cartesiano (figura 2.7). In generale, l'area della superficie compresa tra una curva di equazione $y = f(x)$, ove f è una qualsiasi funzione, e l'asse (orizzontale) delle x, è data dal valore dell'integrale $S = \int_0^\infty f(x)dx$.

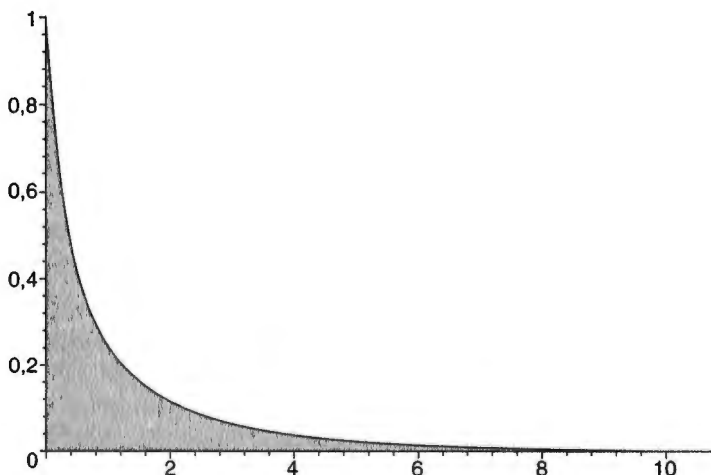



Figura 2.7

Una "meraviglia" geometrica. L'area compresa tra due "curve", ciascuna di lunghezza *infinita*, è invece *finita*.

Nel caso che ci interessa, il calcolo del valore dell'integrale dà come risultato $S = 1$. Detto altrimenti, l'area compresa tra le due "curve" di lunghezza infinita è invece finita (figura 2.7)! Una analoga "meraviglia" si constata per gli asintoti in modo generale. Il gesuita Ignace Gaston Pardies se ne dichiarava stupito già nel XVII secolo, colpito dal fatto che l'Infinito stesso, per quanto sia immenso e innumerabile, si riduce non di meno al calcolo e alla misura della geometria, e il nostro spirito, ancor più grande di esso, è capace di comprenderlo,[31] Par-

31. I.G. Pardies, *Eléments de géométrie*, Paris 1671.

dies ne concludeva che abbiamo davvero l'anima e che in tal modo veniva provata l'esistenza di Dio...

In altro registro, i *frattali* sono delle entità matematiche in cui l'infinito "costeggia" senza posa il finito. Da più di un secolo (Cantor stesso le aveva studiate) si conoscono curve dalle proprietà strane, per esempio che hanno una lunghezza infinita, pur delimitando una superficie finita (figura 2.8); oppure delle curve di lunghezza nulla, pur avendo un numero infinito di punti. Agli inizi degli anni Settanta del Novecento, Benoît Mandelbrot ha introdotto il concetto di *frattale* (dal latino *fractus* – che significa rotto, spezzato, irregolare) per descrivere siffatte "curve". L'esempio che si dà usualmente è quello della lunghezza di una costa estremamente frastagliata, come la costa della Bretagna. Di fatto, la sua lunghezza dipende dall'unità di misura (di "risoluzione") scelta: più l'unità è piccola, più i dettagli misurabili sono piccoli e più la lunghezza aumenta. Se si raffina senza limite la risoluzione, la lunghezza diventa infinita. In pieno rigore matematico, un oggetto frattale viene costruito a partire da un inscatolamento infinito di strutture identiche a se stesse, ma su scale differenti (è l'invarianza per la trasformazione detta *omotetia interna*). Ovviamente, si tratta di una idealizzazione, poiché non possiamo sperare di trovarne una controparte esatta nella natura. Ma numerosi fe-

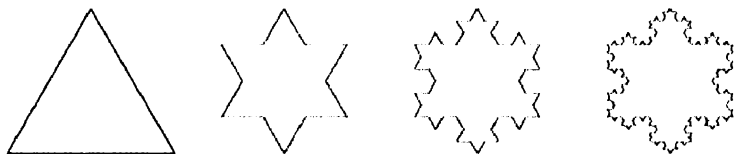



Figura 2.8 Il triangolo frattale di von Koch

Il primo "oggetto frattale" venne individuato da Helge von Koch nel 1904. Si costruisce cominciando da un triangolo equilatero, dividendo ciascuno dei lati in tre parti uguali, ed eliminando da ciascuno di essi la parte mediana; costruendo poi un altro triangolo equilatero là dove era stato tolto tale segmento mediano; e ripetendo il procedimento indefinitamente. Si dimostra che la lunghezza del perimetro allo stadio n è $4(4/3)^n$, e diventa dunque infinito per n (mentre l'area compresa nel perimetro resta sempre finita).

nomeni, come la turbolenza, la transizione dal caos all'ordine, l'aspetto frastagliato delle montagne, il sistema delle arterie, delle vene e dei capillari, ecc., vi si approssimano quanto basta perché sia pertinente impiegare nella loro descrizione quegli "ideali a infinito interno" che sono i frattali.

2.8.7 I gruppi di Lie

L'applicazione della teoria infinitesimale ai gruppi[32] di trasformazione enfatizza una volta di più l'onnipresenza dell'infinito in matematica. Geometria e fisica si interessano a questi gruppi che intervengono per classificare le differenti trasformazioni spaziali o astratte che si impiegano, poniamo, nella fisica della relatività o in quella dei quanti.[33] I più abituali di questi gruppi di trasformazioni appartengono alla famiglia dei cosiddetti *gruppi di Lie*.[34]

Le proprietà di queste strutture matematiche vengono espresse facendo appello all'infinito, dal momento che le trasformazioni vengono anzitutto considerate da un punto di vista infinitesimale. Per esempio, è possibile mostrare che qualsiasi rotazione può essere ottenuta dalla composizione di un numero infinito di rotazioni infinitesimali, cioè di un angolo infinitamente piccolo. Sotto il profilo generale, ogni trasformazione finita può essere ottenuta per composizione infinita di trasformazioni infinitesimali.

32. Un gruppo è una struttura che consiste di un insieme di elementi e di una legge di "moltiplicazione" definita per qualunque coppia di essi, per cui vale la legge associativa della moltiplicazione $a(bc) = (ab)\,c$; vi è inoltre un elemento di identità 1 che soddisfa le relazioni $1a = a1 = a$; per tutti gli elementi a del gruppo, e ciascun elemento a possiede un inverso a^{-1}, tale che $a^{-1}\,a = a\,a^{-1} = 1$. Per esempio, l'insieme **R** dei numeri reali, escluso lo zero, costituisce un gruppo per l'usuale moltiplicazione, in cui l'identità è costituita dal numero 1 e l'inverso di a è l'usuale reciproco $1/a$. Vedi nota 29 sull'inversione. [NdC]

33. Vedi, per esempio, R. Penrose, *La strada che porta alla realtà*, cit., pp. 247-291. [NdC]

34. Dal nome del matematico norvegese Sophus Lie (1842-1899). Per il contributo di Lie vedi per esempio M. Kline, *Storia del pensiero matematico*, citato in bibliografia, vol. 2, pp. 1328-1329, 1344-1347. [NdC]

Il vantaggio di questa sorprendente procedura resta il fatto che è sufficiente caratterizzare le proprietà di un numero limitato di trasformazioni infinitesimali. Si tratta dei "generatori" di quella che si chiama "l'algebra di Lie" associata al gruppo di Lie preso in considerazione. Quasi tutte le proprietà di questi gruppi infiniti discendono da quelle di un numero finito di trasformazioni infinitesimali.

2.9 Finitismo e intuizionismo

Il ricorso all'infinito è chiaramente una necessità matematica, che persino Aristotele era disposto a riconoscere, anche se lui accettava solo l'infinito potenziale. Il cosiddetto metodo di esaustione di Archimede costituisce un esempio flagrante di ricorso all'infinito mascherato e non esplicitato. E a lungo ci si è sentiti in dovere di credere che, almeno per la maggior parte di essa, la matematica non abbisognasse dell'infinito attuale. Ma, per dirla con lo slogan di Tony Lévy, "la matematica tesse la sua tela attorno all'idea di infinito".[35] Quest'ultima ha invaso tutte le branche della disciplina, le è divenuta indispensabile. E dovunque si può congetturare che possa insinuarsi l'infinito, sembra che questo lo faccia davvero. È così, per esempio, che la matematica ha fatto proprio il concetto di uno spazio dotato di un numero *infinito* di dimensioni.

Tuttavia, quasi come una forma di reazione, si è sviluppato anche un movimento "finitista". Si tratta di una scelta di campo entro la filosofia della matematica, e muove dall'idea che il ricorso all'infinito non avrebbe senso alcuno, dal momento che gli oggetti, o strutture, la cui definizione fa appello all'infinito, non avrebbero esistenza o realtà.

Tesi del genere sono diventate oggetto di innumerevoli dispute tra i vari matematici e filosofi della matematica del primo Novecento. Ma i matematici finitisti, che si vietano di ricorrere all'infinito, si rivelano piuttosto "poveri"...

35. T. Lévy, *Figures de l'infini*, citato in bibliografia.

Giudicare il ricorso all'infinito privo di senso sembra questione di gusto personale. È vero che l'infinito non rientra nel campo dell'intuizione, ma si può dire lo stesso di altre nozioni della matematica. Questa non è una scienza empirica, e non ha bisogno di rappresentazione intuitiva o di possibilità di visualizzazione dei concetti di cui si occupa. Per dirla con le parole di Bertrand Russell, si occupa non della loro esistenza, ma della loro possibilità di esistenza. Fino a oggi, la supposta esistenza degli infiniti, di un tipo o di un altro, non ha prodotto alcuna contraddizione. I matematici formalisti, nella linea di Hilbert, ritengono che bisognerebbe però dimostrare che essa *non potrà mai* produrre contraddizioni. Tuttavia, accettano i riferimenti all'infinito sotto certe condizioni.

La scuola degli "intuizionisti" in matematica, creata dal logico e matematico Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966), considera la matematica come un'attività dello spirito alla cui origine vi è la percezione del tempo, e a partire dalla quale è costituita l'intuizione fondamentale degli oggetti matematici stessi. Gli intuizionisti si preoccupano del carattere ben definito, o meno, di eventuali nozioni facenti appello a quella di infinito. Scrive Brouwer: "Nella scienza tutto ciò che è percepito è posto al di fuori di sé in un universo di percezione indipendente dal sé; il suo legame con il sé, sua unica sorgente guida, è perduto. Essa costruisce allora un substrato logico-matematico che è completamente estraneo alla vita, un'illusione, che agisce nella vita come una Torre di Babele con la sua confusione delle lingue".[36] Gli intuizionisti si vietano così di operare con totalità infinite, senza respingere per questo l'uso delle successioni infinite e della nozione di limite. Per esempio, ammettono le dimostrazioni per ricorrenza. Le loro idee non sono poi così lontane da quelle degli antichi Greci: in un certo qual modo, ammettono l'infinito in potenza, ma non quello in atto. Dal punto di vista di un intuizionista, qualsiasi espressione relativa a un infinito in potenza è in realtà solo una *façon de*

36. Vedi *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 37, 3, 1896, pp. 381-429, in particolare p. 387. [NdC]

parler, un modo di riferirsi a un sistema finito, ma estendibile. Gli intuizionisti accettano esclusivamente una parte della matematica, quella che può essere interpretata col solo riferimento a strutture finite. Reagendo alla teoria degli infiniti creata da Cantor, il berlinese Kronecker aveva dichiarato: "Dio ha creato i numeri interi, il resto è opera dell'Uomo". Tutta l'ambiguità della controversia è stata riassunta nel 1910 da un letterato filosofo come Paul Valéry (un intellettuale che, forse più di ogni altro, ha lottato per abolire le frontiere che dividono il mondo della cultura) con queste parole: "C'è in noi una sensazione finita dell'infinito. Non è prova di alcunché".

3

L'INFINITO DELLA MATERIA

> Insieme erano tutte le cose, illimiti per quantità e per piccolezza, perché anche il piccolo era illimite.
>
> ANASSAGORA

3.1 Il continuo, l'esteso, l'infinito

Come diceva Galileo, la fisica è scritta in linguaggio matematico. Ne deriva che gli infiniti che sono introdotti in matematica devono intervenire pure in fisica. Il problema riguarda qualsiasi grandezza estensiva: lo spazio e il tempo, da una parte (come li abbiamo trattati nel Capitolo 1). Da un'altra parte, le serie di numeri (Capitolo 2), infine la materia.

Con la semplice operazione di determinare l'inverso, o reciproco, la matematica mette in relazione i numeri piccoli con i numeri grandi. Se *a* diventa grandissimo, al limite infinito, $1/a$ diventa piccolissimo, al limite zero. Ciò istituisce una corrispondenza tra zero e l'infinito. Così, stando alla *Fisica* di Aristotele, l'infinitamente piccolo è simmetrico dell'infinitamente grande. Si tratta di un infinito per divisione, cioè un inesauribile che si manifesta quando si suddividono indefinitamente le grandezze.

Lo sviluppo della matematica ha portato, agli inizi del Novecento, a una nozione di infinito di cui si aveva già buona padronanza. Ma tutto ciò fu al prezzo di un arsenale concettuale relativamente complesso, e si constata che delle entità infinite

che ne risultano (per esempio, i numeri transfiniti) non si possono determinare gli inversi così facilmente come si determina l'inverso di un numero ordinario. Così, la natura e la storia degli enti infinitamente piccoli appaiono radicalmente diverse da quelle degli infinitamente grandi (figura 3.1). È vero in matematica; è ancora più evidente in fisica, dal momento che l'infinitamente grande e l'infinitamente piccolo, in linea di principio, si riferiscono a due branche che all'apparenza sono totalmente separate: astrofisica e cosmologia da un lato e fisica delle particelle dall'altro (ma vedremo nel Capitolo 4 come oggi si ponga in modo cruciale la questione di connettere le due discipline, attraverso il problema dell'infinitamente piccolo per lo spazio e il tempo).

Figura 3.1 Un'enciclopedia medioevale del secolo XIV

L'estensione del mondo porta all'infinitamente grande? L'organizzazione della materia porta all'infinitamente piccolo? Forse solo Dio conosce le risposte! Ma lentamente la fisica si indirizza a tali questioni. © Bibliothèque Sainte-Geneviève, Paris. Vedi inserto a colori, tavola VII.

Il problema dell'infinitamente piccolo sorge dal fatto che una grandezza finita – la lunghezza di un segmento, una durata, una certa quantità di materia – può essere, almeno dal pensiero, divisa in una miriade di sottoelementi. Per descrivere i movimenti, o i mutamenti, di un sistema, conviene ricorrere all'analisi più fine possibile, considerando intervalli spaziali o temporali e quantità di materia più piccoli che si può, al limite infinitamente piccoli. È così che la cinematica e la dinamica hanno condotto a prendere in considerazione quantità di tempo e di spazio infinitamente piccole. Analogamente, l'infinitamente piccolo pare inevitabile anche nelle indagini circa la materia e le grandezze che ne misurano l'estensione, come massa, volume, ecc.

In tutti questi casi – spazio, tempo, massa – la divisibilità all'infinito pare avere un nesso con la natura continua delle cose (nel § 4.6 vedremo come un approccio di tipo nuovo contesti, però, questo punto). L'esperienza del continuo è radicata nello strato più profondo delle nostre modalità di comprendere il Mondo: il continuo costituisce l'indizio intuitivo della stabilità delle cose, della consistenza e della permanenza del Mondo che ci circonda. Il blocco di pietra è sempre lì, fermo e integro, identico a se stesso. La superficie regolare di un mare tranquillo offre al nostro sguardo lo spettacolo della continuità. E tutto questo tende a restare così com'è, reagendo a qualsiasi perturbazione.

3.2 I paradossi di Zenone

> Ritoccare il nostro concetto di Universo, per quel pezzettino di tenebra greca?
>
> JORGE LUIS BORGES

Nel V secolo a.C. Zenone di Elea, che sarebbe appartenuto alla scuola fondata da Parmenide, ha formulato dei paradossi che sembravano opporsi tanto all'ipotesi della continuità quanto all'ipotesi dell'atomismo. Ci sono pervenuti grazie a Aristo-

tele: "Il secondo [argomento] è il cosiddetto 'Achille': questo intende provare che il più lento, correndo, non sarà mai sorpassato dal più veloce: infatti, necessariamente, l'inseguitore dovrebbe giungere prima là donde il fuggitivo è balzato in avanti".[1] Un altro celebre paradosso zenoniano è quello della freccia scagliata verso il bersaglio, e che però non lo raggiunge mai. Anzi, ogni volta che la freccia ha percorso la metà del suo cammino, gliene resta da percorrere un'altra metà, ecc.

Con questi argomenti Zenone, da buon discepolo di Parmenide, si proponeva di negare che una qualunque cosa possa accadere nell'Universo, e contestava in particolare la possibilità del moto: il movimento è impossibile, poiché il mobile deve attraversare la metà per arrivare alla fine e, prima ancora, la metà della metà, e prima ancora, la metà della metà della metà, ecc.

Inoltre, qualche filosofo, o poeta, rimasto sconosciuto ha ulteriormente arricchito la severa testimonianza di Aristotele con un eroe e con una tartaruga che rendono il paradosso di Zenone ancor più vivido. Ecco questa versione popolare nelle parole del grande Jorge Luis Borges: "Achille corre dieci volte più svelto della tartaruga e le concede dieci metri di vantaggio. Achille corre quei dieci metri e la tartaruga percorre un metro; Achille percorre quel metro, la tartaruga percorre un decimetro; Achille percorre quel decimetro, la tartaruga percorre un centimetro; Achille percorre quel centimetro, la tartaruga un millimetro; Achille il millimetro, la tartaruga un decimo di millimetro, e così all'infinito; di modo che Achille può correre per sempre senza raggiungerla...".[2]

Ventitré secoli di confutazioni, più o meno decisive, non hanno troppo scalfito la forza del paradosso. Aristotele contrasta Zenone su un piano puramente filosofico, negando la divisibilità all'infinito, nota anche come *regresso all'infinito*. È questa un'idea che dà le vertigini. Farà versare torrenti di in-

1. Aristotele, *Fisica*, 239 b, 15-18, in Aristotele, *Fisica, Del cielo*, cit., p. 160. [NdC]

2. J.L. Borges, "La perpetua corsa di Achille e della tartaruga", in *Tutte le opere*, cit., vol I, p. 380. [NdC]

chiostro a filosofi e a teologi. Certuni l'hanno addirittura utilizzata per provare l'esistenza di Dio. Tommaso d'Aquino (1221-1274)[3] sottolinea che ogni cosa ha una causa, che è a sua volta effetto di una causa antecedente. L'Universo è dunque una catena causale, e ogni causa è già un effetto. Ogni stato proviene dallo stato anteriore e determina il successivo; ma l'insieme della sequenza potrebbe anche non essere, poiché i termini che la compongono sono condizionali. Eppure, l'Universo *è*. Dalla sua esistenza possiamo inferire quella di una causa prima non contingente, Dio.

Questo argomento, ripreso da Leibniz e da molti altri pensatori, offre così una risposta teologica al problema detto *della contingenza*: "Perché c'è qualcosa al posto di nulla?". Notiamo che si tratta pure di un problema cosmologico con cui si sono confrontati i modelli del Big Bang. Comunque, ecco come i sofismi apparentemente assurdi di Zenone ci conducono ben lontano da un semplice paradosso dell'infinito...

Nel suo *Sistema di Logica*[4] (1843), John Stuart Mill (1806-1873) spiega come l'errore di ragionamento sia generato da una confusione tra un tempo indefinitamente divisibile e un tempo infinito. Oltrepassare uno spazio finito richiede un tempo infinitamente divisibile, ma non infinito. Sotto il profilo matematico, la cosa si comprende bene ricorrendo alla convergenza della serie 10 + 1 + 1/10 + 1/100 + 1/1000 + 1/10.000... La somma di questa progressione geometrica infinita è proprio un numero finito, più precisamente 11 + 1/9.

È forse Bertrand Russell[5] (1872-1970) che ne ha dato la confutazione più cristallina, basandosi proprio sulla definizione di infinito fornita da Bolzano e da Cantor: una serie infinita è una serie di cui si possono sdoppiare gli elementi in successioni infinite (§ 2.4). Una volta accettato il paradosso della riflessività, la parte può valere quanto il tutto. La stessa quantità

3. Vedi *Summa theologiae*, I, 2, 3.

4. Vedi J.S. Mill, *Sistema di logica deduttiva e induttiva*, citato in bibliografia, vol. 2, Libro V, capitolo VII.

5. Vedi B. Russell, *Introduzione alla filosofia della matematica*, citato in bibliografia.

di punti che c'è nell'Universo è pure in un metro di Universo, o in un decimetro. Lo scioglimento del problema di Achille è contenuto in questa risposta. Ogni luogo occupato dalla tartaruga resta in rapporto con un altro occupato da Achille. Basta far corrispondere punto a punto le due successioni per dichiararle uguali. Non resta più alcun residuo del vantaggio concesso inizialmente alla tartaruga. Il punto finale del suo percorso coincide con quello del percorso di Achille e con l'ultimo istante del tempo della corsa...[6]

Si osservi che una versione temporale del paradosso di Zenone è stata data da William James (1842-1910):[7] egli nega che quattordici minuti possano trascorrere, dal momento che è necessario che sette minuti siano già trascorsi prima e, prima di sette, tre minuti e mezzo e, prima ancora, un minuto e tre quarti, e così via, fino all'irraggiungibile fine attraverso il labirinto del tempo...[8]

6. Scrive Borges che quella di Russell è l'unica "confutazione" di Zenone "degna dell'originale". In particolare, "per Russell l'operazione di contare è (intrinsecamente) quella di equiparare due successioni". Così, "ciascun posto occupato dalla tartaruga conserva una relazione con un posto occupato da Achille, e la minuziosa corrispondenza, punto per punto, di ambedue le successioni simmetriche, basta per dichiararle uguali. Non rimane nessun residuo periodico del vantaggio iniziale concesso alla tartaruga: il punto finale del suo percorso, l'ultimo del percorso di Achille e l'ultimo nel tempo della corsa coincidono" (J.L. Borges, "La perpetua corsa di Achille e della tartaruga", in *Tutte le opere*, cit., pp. 383-384). [NdC]

7. Vedi W. James, *Introduzione alla filosofia*, citato in bibliografia.

8. Per dirla ancora con le parole di Borges: "Le dichiarazioni di Russell (scrive [James]) eludono la vera difficoltà. Che riguarda la categoria *crescente* dell'infinito, non la categoria *stabile*, che è l'unica presa in considerazione da lui, quando presuppone che la corsa è stata compiuta e che il problema è quello di equilibrare i percorsi. D'altra parte, non ne occorrono due: quello di ciascuno dei corridori, o il semplice lasso di tempo vuoto, implica da sé la difficoltà, che è quella di raggiungere una meta quando un previo intervallo continua a presentarsi di volta in volta e a ostruire il cammino. [...] Sono arrivato al finale della mia notizia, non del nostro cavillare. Il paradosso di Zenone di Elea, come osservò James, è un attentato non solo alla realtà dello spazio, bensì a quella più invulnerabile e sottile del tempo. Aggiungo che l'esistenza in un corpo fisico, la permanenza immobile, lo scorrere di una sera della vita, si allarmano di avventura per colpa sua. Quella decomposizio-

3.3 Il calcolo infinitesimale

> Credo che non ci sia parte alcuna della materia che non sia, non dico divisibile, ma divisa in atto, e, per conseguenza, la più piccola particella deve essere considerata come un mondo pieno di un'infinità di creature differenti.
>
> G.W. LEIBNIZ

Il problema dell'infinito ha sotteso la storia della cinematica e della dinamica, e dunque della fisica. Da Archimede fino a Galileo, numerose tappe dello studio della natura sono caratterizzate dal tentativo di spiegare il Mondo con la matematica. Ma questo tentativo è inciampato nella questione degli infinitesimali. Quando ci si interessa allo spazio, al tempo o a qualsiasi altra grandezza, ci si trova pressoché immediatamente di fronte ai paradossi circa gli indivisibili. "Come interpretare le somme infinite di parti infinitamente piccole, basandosi su concetti matematici rigorosi?" È un'altra versione del problema espresso a suo tempo dai paradossi di Zenone.

Sul confine tra matematica e fisica, questi paradossi hanno bloccato lo sviluppo della meccanica, saremmo tentati di dire dell'intera fisica. Il loro scioglimento nei secoli XVII e XVIII ha posto fine all'idea che la matematica, più precisamente la geometria, costituisse ciò attraverso cui può essere *veramente* afferrata, *compresa* l'essenza delle cose. Ma ha anche giustificato, in cambio, la fisica matematica su basi nuove.

Le difficoltà connesse agli indivisibili si manifestano, per esempio, a proposito delle questioni sull'inerzia e sul movimento poste da Galileo e da Cartesio. Il "metodo degli Antichi" escogitato da Archimede (§ 2.1) e battezzato "metodo per esaustione" da Gregorio di Saint-Vincent (1584-1667)

ne accade mediante la sola parola *infinito*, parola (e poi concetto) di spavento che abbiamo generato temerariamente e che una volta ammessa in un pensiero, esplode e lo uccide. (Ci sono altri moniti antichi contro il commercio di una parola tanto perfida: c'è la leggenda cinese dello scettro dei re di Liang, che diminuiva di una metà a ogni nuovo re; lo scettro, mutilato dalle dinastie, esiste ancora)" (J.L. Borges, "La perpetua corsa di Achille e la tartaruga", cit., pp. 384-385). [NdC]

viene riportato in auge per fungere da base ai lavori di Pierre de Fermat (1601-1665), Blaise Pascal (1623-1662) e John Wallis (1616-1703), che danno i primi lineamenti di quello che sarà poi il calcolo infinitesimale. Nella stessa epoca, Cartesio e Fermat, con l'introduzione delle coordinate dette appunto *cartesiane*, traducono i problemi sulle forme geometriche in problemi sui numeri. Questa *numerizzazione* della geometria conferisce al numero piuttosto che alla lunghezza il ruolo chiave in matematica. Dopo tutto ciò, il calcolo infinitesimale viene sistematizzato da Leibniz e, prima ancora, da Isaac Newton (che lo chiamava "calcolo delle fluenti e delle flussioni"). Se Leibniz concepisce senza problema o paradosso un "movimento divisibile all'infinito" e inventa un calcolo che permette di manipolare in modo coerente "numeri" che sono infinitamente piccoli senza essere zero, descrive tuttavia le quantità infinitesimali come "finzioni senza realtà ontologica", mere "nozioni ideali".

Il concetto di quantità infinitamente piccola resta, dunque, sconcertante, in un'epoca in cui gli oggetti matematici erano dotati della stessa realtà che, poniamo, si è oggi disposti a conferire agli elettroni. Ci vorrà un certo tempo perché emerga l'indiscutibile utilità del calcolo infinitesimale in fisica. Sono Pierre Varignon (1654-1722) e Fontenelle che generalizzano l'impiego di questo nuovo calcolo che comporta all'inizio del Settecento la trasformazione della scienza del moto e la sua relazione con la questione dell'infinito. La concezione dell'infinitamente piccolo, ormai padroneggiabile dal punto di vista matematico, costituisce una buona base per la fisica matematica, per una fisica, cioè, edificata su un sistema coerente di assiomi, di principi e di concetti di cui è possibile confrontare le deduzioni con l'esperienza. Questo programma viene realizzato in pieno da Leonhard Euler (1707-1783) e da Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) con la loro *analisi infinitesimale*.

Se l'adozione graduale dell'infinitamente piccolo in matematica è alla base del calcolo infinitesimale e consente la nascita della fisica matematica, si è ancora lontani da una genuina teoria dell'infinito. Per due secoli, matematici e fisici hanno

Il simbolo dell'infinito[9]

Nel secolo XVII nasce il calcolo differenziale e integrale, e viene messo a punto un formalismo che consente la manipolazione delle quantità infinitesimali. L'inverso dell'infinitamente piccolo è l'infinitamente grande: non c'è da stupirsi che quello stesso secolo assista alla comparsa del simbolo ∞. È il matematico inglese John Wallis che usa per l'infinito matematico questa abbreviazione. Ma perché scegliere proprio questo simbolo? Wallis godeva di buona reputazione anche come filologo: probabilmente, sapeva che il simbolo designava una legatura latina della lettera *m*, comparsa nel VII secolo, cioè una grafia corsiva utilizzata per indicare 1000 in cifre romane, ovvero un numero "grandissimo". D'altro canto, un contemporaneo di Wallis, il matematico e filosofo delle Province Unite, Bernhard Nieuwentijt (1654-1718), utilizza il segno *m* per indicare l'infinito nella sua *Analysis infinitorum* (1695). Wallis potrebbe avere anche pensato che il doppio occhiello di quel simbolo potesse rimandare immediatamente all'infinito, perché tale doppio occhiello può essere percorso senza fine...

M --> *m* --> ∞

messo a punto con successo tecniche di calcolo, pur contestandone i fondamenti filosofici. Lo abbiamo accennato nel Capitolo 2: è solo alla fine del XIX secolo che quell'irritante granello di sabbia finito nel guscio dell'ostrica matematica produrrà la sua perla, la teoria degli insiemi di Cantor. Ma questo tipo di ricerca è lontana dalla fisica e non sembra avere connessione alcuna col problema della materia.

3.4 La divisibilità della materia

Si può dividere indefinitamente la materia? Essa è continua o "discreta"? Si può suddividere senza limite un qualsiasi corpo materiale in frazioni sempre più piccole o giungeremmo a

9. Vedi Maria Reményi in AA.VV., *Les infinis*, cit.

entità indivisibili? Come si è detto, l'idea di una materia composta da parti "che non si possono tagliare" (gli "atomi") risale sostanzialmente a Democrito (460-370 a.C.). Il filosofo di Abdera ha congetturato che la materia potesse essere divisa fino a una scala ultima, quella dei piccolissimi costituenti elementari e indivisibili.

Con l'eccezione di alcune allusioni sparpagliate negli scritti dei filosofi del Medioevo, l'atomismo sarà ripreso in modo se-

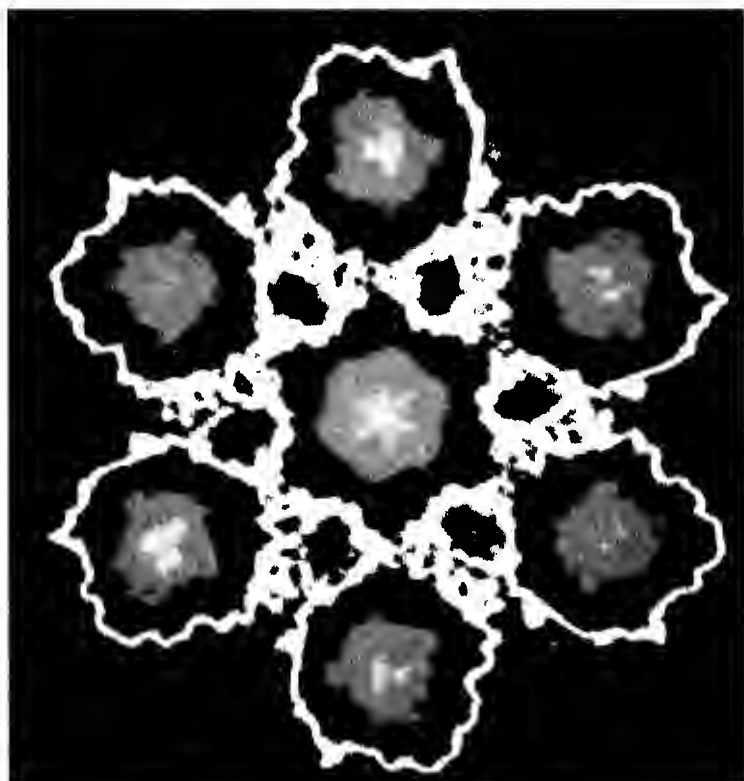



Figura 3.2 L'atomo

Dopo secoli e secoli di controversie sulla divisibilità all'infinito della materia, la fisica ne ammette oggi il carattere discontinuo. Se la tecnologia ci consente di "vedere" gli atomi, i mattoni elementari devono ora venir cercati a un livello più fondamentale, quello delle particelle elementari. Fonte: Mitsuo Ohtsuki/Science Photo Library/Cosmos. Vedi inserto a colori, tavola VIII.

rio nella modernità. Il secolo del suo trionfo è l'Ottocento. A poco a poco, la nozione di atomo si consoliderà, venendo a indicare il costituente fondamentale della materia. Ma in quel secolo, ci si renderà anche conto che lo stesso atomo, inteso in questo nuovo senso, è dotato di struttura interna (figura 3.2). George Johnstone Stoney (1826-1911) introduce nel 1891 il termine "elettrone" per indicare prima la quantità elementare di elettricità, poi la particella portatrice di questa stessa quantità. Le ricerche di Jean-Baptiste Perrin (1870-1942), Joseph John Thomson (1856-1940) e Robert Andrews Millikan (1868-1953) fanno quindi emergere un'idea dell'elettrone come particella costitutiva dell'atomo carica negativamente. Ne consegue, come corollario, l'esistenza di una carica positiva che bilanci tale carica negativa: nel 1904, Thomson propone, infatti, l'idea che l'atomo sia costituito da un nucleo positivo circondato da elettroni extranucleari. Nel 1911 Ernest Rutherford (1871-1937) conferma che un atomo consiste in un nucleo centrale di carica positiva, piccolo ma massivo, circondato da un corteo di elettroni. Calcola per il nucleo una taglia dell'ordine di 10^{-13} cm, mentre l'atomo nel suo complesso misurerebbe circa 10^{-8} cm. In questa concezione, l'atomo è fatto essenzialmente di vuoto.

Il modello di Rutherford presenta, però, una difficoltà fondamentale dovuta alla comparsa intempestiva di un infinito. Sotto l'influenza del campo attrattivo del nucleo, gli elettroni devono accelerare e, stando a quanto dice la teoria classica, irradiare dell'energia. Alla fine, non possono che rallentare e collassare verso il centro del nucleo con un moto a spirale – il tutto in meno di un miliardesimo di secondo! L'atomo, secondo Rutherford, dovrebbe dunque essere instabile, a dispetto dell'esistenza ampiamente constatata di atomi stabili.

Per evitare questa catastrofe, il danese Niels Bohr (1865-1962) avanza un'idea innovativa nell'articolo "On the constitution of atoms and molecules" (1913). Nella teoria di Bohr gli elettroni non possono collocarsi ovunque intorno al nucleo: sono ammesse solo certe orbite. Così, l'emissione conti-

Dall'atomo al nucleone

Benché sia piccolissimo, un atomo non è infinitamente piccolo. Il suo diametro è circa un decimo di miliardesimo di metro, taglia che un'esperienza piuttosto semplice riesce a evidenziare: una pellicola oleosa diffusa sull'acqua si stira fino a raggiungere uno spessore che corrisponde al diametro di una molecola. Grazie al microscopio a effetto tunnel, i ricercatori sono ormai in grado di osservare gli atomi. Che cosa vedono? Delle piccole palle da tennis: ne occorrerebbero cento milioni per fare un centimetro... Alla fine dell'Ottocento i fisici avevano dimostrato che gli atomi potevano essere dissociati in costituenti più piccoli: il nucleo e la nube elettronica. La taglia dell'avvolgimento elettronico determina quella degli atomi, mentre la massa di questo rappresenta meno di un millesimo della massa atomica. Per esempio, nel caso dell'idrogeno il nucleo è 1840 volte più pesante dell'elettrone. Il nucleo dell'idrogeno è costituito da una sola particella: il protone. I nuclei degli altri atomi contengono tutti dei protoni e dei neutroni: questi ultimi sono particelle (elettricamente neutre) la cui massa è paragonabile a quella dei protoni. Collettivamente detti *nucleoni*, protoni e neutroni sono parenti stretti, entrambi soggetti alla cosiddetta *interazione forte*; questa è rilevante a distanza cortissima: 10^{-15} m (un milionesimo di miliardesimo di metro). È la stima del diametro dei nucleoni.

nua predetta dalla teoria classica non si produce, e nemmeno la conseguente catastrofe (il problema di Bohr era quello della stabilità degli atomi). Questa ipotesi spiega, inoltre, altre proprietà degli atomi allora non ancora ben capite (gli spettri atomici, cioè la ripartizione in frequenza delle radiazioni che gli atomi sono suscettibili di emettere o di ricevere). Il fisico danese integra così le proposte euristiche di Max Planck nel 1900 e di Albert Einstein nel 1905, secondo cui l'energia è quantizzata. Benché ancora imperfetti, tutti questi lavori innescano la transizione alla fisica dei quanti.

3.5 Il corpo nero e l'infinito

L'altra motivazione decisiva per l'avvento di una nuova concezione della materia (quella che sarà propria della fisica dei quanti) viene dalla comparsa di un infinito nel calcolo concernente il cosiddetto *corpo nero*. Un corpo nero è il prototipo ideale di qualsiasi oggetto che emetta o riceva radiazione elettromagnetica: per esempio, un metallo reso rovente che emette della luce. In realtà, gli scambi di radiazione avvengono al livello degli atomi e degli elettroni in agitazione perpetua. Il problema è di determinare lo spettro della radiazione, cioè la sua ripartizione in frequenze a partire dalla temperatura della materia con cui essa interagisce. Orbene, il calcolo effettuato seguendo le regole della termodinamica statistica fa comparire un infinito indesiderato: la quantità di energia emessa sotto forma di radiazione dovrebbe aumentare indefinitamente in funzione della frequenza. Sarebbe dunque infinita: cosa inaccettabile e contraria all'esperienza.

Per sbarazzarsi del problema, noto come "catastrofe ultravioletta", e risolvere la contraddizione, Max Planck (1858-1947) formula un'idea che all'inizio sembra tipicamente *ad hoc*: assume, infatti, che l'energia possa scambiarsi, tra radiazione e materia, solo per pacchetti discontinui, detti *quanti*. Sfruttando questa ipotesi, il nuovo calcolo evita la divergenza, in pieno accordo con l'esperienza.

Il bilancio di tale mossa era assai positivo: eliminazione completa dell'infinito! E tuttavia, Planck era il primo a non sapere come interpretare la sua ipotesi, che aveva introdotto *faute de mieux*. Eppure, proprio tale ipotesi doveva, negli anni successivi, stimolare l'elaborazione della *teoria quantistica*, che avrebbe fornito la soluzione definitiva alla questione dell'infinito nel caso del corpo nero. Tuttavia, non troppo diversamente che per la relatività generale, questa altra grande rivoluzione scientifica del Novecento doveva, a sua volta, generare dei nuovi infiniti.

3.6 I campi quantistici

> Vedere un Mondo in un grano di sabbia
> E un Cielo in un Fiore Selvaggio,
> Tenere l'Infinito nel palmo della mano,
> L'eternità in un'ora.
>
> WILLIAM BLAKE

Le questioni circa gli infinitamente grandi legati allo spazio e al tempo appartengono essenzialmente al dominio della relatività generale. Quelle circa gli infinitamente piccoli, che riguardano la materia, la radiazione e le loro interazioni, rientrano nel dominio della fisica quantistica. Quest'ultima, ai nostri tempi, è descritta in modo adeguato solo nello spazio newtoniano, immutabile e infinito, o nello spazio-tempo della relatività ristretta (spazio-tempo di Poincaré-Minkowski). Ma non tiene conto della gravitazione, e non sembra consentire alcun approccio originale alla questione dello spazio: per il momento pare impossibile integrare le acquisizioni ottenute grazie alla relatività generale nella descrizione quantistica. Fortunatamente, la stragrande maggioranza delle situazioni in cui interviene la fisica dei quanti comporta solo delle scale limitate, dei campi gravitazionali poco intensi. Sole eccezioni sono l'era di Planck in cosmologia (§ 4.4) e il fondo dei buchi neri (§ 4.1).

Oggi, la nostra descrizione di qualsiasi sostanza è di tipo quantistico. In ultima istanza, è la *teoria quantistica dei campi* che ne rende conto. Una prima versione venne elaborata negli anni Trenta del Novecento da Paul A.M. Dirac (1902-1984), nella forma di quella che si chiama abitualmente *elettrodinamica quantistica*, in seguito sviluppata da Werner Heisenberg (1901-1986) e da Wolfgang Pauli (1900-1958). Questa teoria si occupa del caso più semplice, quello della interazione tra elettroni e fotoni. Colloca sullo stesso piano e tratta allo stesso modo la materia (protoni ed elettroni, per esempio) e la radiazione (fotoni): qualsiasi sostanza o interazione viene descritta sotto forma di campo quantistico. Ma la teoria quantistica dei campi si imbatte in difficoltà per la comparsa di infiniti. Se ne esce soltanto con una sorta di artificio matematico di cui, nelle pagine che seguono, cercheremo di valutare l'importanza.

3.7 Il vuoto

> Nella realtà, l'origine risiede nell'energia
> E l'energia non è altro che l'origine;
> L'energia risiede nel vuoto
> E il vuoto non è altro che energia.
>
> WANG FUZHI

La fisica quantistica descrive qualunque sostanza (materia, radiazione o interazioni) sotto forma di un campo quantistico. Le proprietà di un tale oggetto lo distinguono dagli oggetti (onde o particelle) trattati dalla fisica classica. Anzitutto, un campo quantistico si estende necessariamente in tutto lo spazio. Non ha senso parlare del campo qui o là solamente. Esso occupa, fondamentalmente, la totalità dello spazio e non lo si può concepire diversamente. Inoltre, un campo è definito dal suo "stato". Può avere, per esempio, degli stati a più o meno grande energia, degli stati che comportano più o meno particelle, degli stati più o meno localizzati nello spazio, ecc. Ecco la novità fondamentale della teoria quantistica dei campi: in un dato stato del campo, anche perfettamente determinato, il numero delle particelle non è sempre definito. È ciò (tra le altre cose) che vieta di impiegare sistematicamente una descrizione puramente corpuscolare della materia. Tutto questo non è che la traduzione del fatto che la nozione di particella è classica e non quantistica. Tra tutti gli stati concepibili di un campo, ce n'è uno (e talvolta più di uno) la cui energia è minima. Viene detto "stato fondamentale" o anche "vuoto quantistico". Questa terminologia non è affatto felice: tale stato "vuoto" è in realtà ben diverso dall'assenza totale, la sua energia è minima, ma non necessariamente nulla.[10]

D'altronde, stando alla fisica quantistica, tutto quello che si può osservare fluttua secondo le relazioni di incertezza di Heisenberg.[11] Attenzione! È piuttosto sospetta l'interpretazione

10. Vedi M. Lachièze-Rey, *Les avatars du vide*, cit.

11. Werner Heisenberg ha enunciato le relazioni d'*indeterminazione* in un articolo del 1927, dal titolo "Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik", in *Zeitschrift für Physik*, 43, 1927, pp. 172-198; tr. it. "Sul contenuto intuitivo della cinematica e della

che arriva a dire che la *realtà* delle cose fluttua: è ciò che si può misurare (è ciò che si cerca di interpretare in termini classici) che sembra fluttuare. Il vuoto non sfugge a questa regola, e fluttua anche lui. Si esprime la cosa, talvolta, con uno stile immaginoso, dicendo che durante una breve durata Δt è possibile prendere a prestito una quantità di energia ΔE per creare delle particelle. Più il prestito dura, più l'energia presa a prestito deve essere debole. Δt e ΔE sono legati insieme da una "relazione d'incertezza". Delle particelle possono scaturire dal nulla, godere di un'effimera esistenza prima di ricadere nell'oblio.

Così, il vuoto resta la sede di questa incessante attività, una sorta di rifugio per questa moltitudine di particelle dalla permanenza temporanea. Tuttavia, queste particelle non possono essere rilevate. Viaggiando da vuoto a vuoto, vengono qualificate come "virtuali". Il vuoto non è inerte e senza proprietà; è piuttosto un fermento ribollente di particelle virtuali che vibrano di energia palpitante e di vitalità.

Al vuoto si oppongono gli stati "eccitati", e sono le eccitazioni in rapporto al livello fondamentale che interpretiamo in termini di presenza di particelle, per esempio di elettroni, stando alla concezione ordinaria. Ma lo sfondo di attività frenetica è sempre presente: in realtà, un elettrone si sposta in un mare di particelle virtuali aggrovigliate, di tutte le specie: altri

meccanica quantoteoriche", in W. Heisenberg, *Indeterminazione e realtà*, a cura di G. Gembillo, Guida, Napoli 1991, pp. 35-67. Heisenberg usa in tedesco varie parole nel presentare le sue relazioni o nel farvi riferimento: *Ungenaugkeit* ("inesattezza", "imprecisione"), *Unbestimmtheit* ("indeterminazione") e *Unsicherit* ("incertezza"). Pare tuttavia chiaro come l'uso di questi termini nell'articolo del 1927 riveli la prevalente interpretazione di tali relazioni come inevitabili inesattezze o imprecisioni (circa le grandezze fisiche) causate dal disturbo dell'atto di misura ("incertezza", invece, è più legato all'ignoranza soggettiva dello sperimentatore, mentre "indeterminazione" all'assenza "intrinseca" di valori esatti per le grandezze fisiche in questione). Comunque, tale interpretazione venne messa in discussione da Niels Bohr, che fece notare come tali "incertezze" sulle grandezze fisiche avessero appunto origine "intrinseca" (secondo Bohr andavano piuttosto legate alla non separabilità "soggetto-oggetto" fra osservatore e sistema fisico osservato). Nella "Postilla" finale dell'articolo del 1927 (pp. 66-67) Heisenberg tenne già conto delle obiezioni di Bohr, servendosi del termine *Unsicherit*, che sottolineava il risalto dato al soggetto conoscente. [NdC]

elettroni, fotoni, quark, leptoni, ecc. La presenza dell'elettrone perturba l'attività del vuoto, e questa distorsione agisce di rimando sull'elettrone stesso. Tutto ciò complica enormemente la descrizione quantistica che deve tener conto di tutti questi fenomeni. Orbene, l'infinita diversità di queste interazioni fantasma coinvolge delle quantità infinite di energia. L'esempio più semplice è quello di due particelle, poniamo due elettroni, che si scambiano un fotone (figura 3.3). Tra l'emissione del fotone e la sua ricezione, quest'ultimo interagisce nel suo cammino con altre particelle prima di raggiungere l'altro elettrone. Ciò può tradursi nella trasformazione del fotone in una coppia elettrone-positrone;[12] gli elementi di questa nuova coppia possono scambiare a loro volta un altro fotone virtuale; poi annichilirsi, generando un nuovo fotone, che è questa volta assorbito dall'elettrone recettore.

Questo non è che un esempio, e la gamma delle possibilità è infinita. Gli scambi sempre più aggrovigliati tra differenti tipi di particelle virtuali tessono una sorta di rete; particelle fantasma entrano ed escono, appaiono e scompaiono in un groviglio vibrante di energia. L'infinita complessità di questa situazione sembra sfidare calcolo e comprensione. Emergono dei problemi, per esempio, quando si cerca di calcolare l'energia di un elettrone. Il calcolo diretto porta a un valore infinito: in questo mare agitato dall'attività del vuoto, l'elettrone è avviluppato da un velo fremente di energia mal localizzata, di cui, però, bisogna tener conto. Orbene, il calcolo mostra che i contributi dell'interazione che si svolgono in questo mantello di particelle virtuali aumentano senza limite in prossimità dell'elettrone. È un grave problema, dal momento che ciò vorrebbe dire che la sola stima che possiamo fare dell'energia del-

12. Com'è noto, viene chiamata *antimateria* quella forma di materia in cui talune proprietà chiave delle singole particelle compaiono in forma invertita. L'elettrone, per esempio, ha un'antiparticella dotata di carica elettrica di grandezza uguale, ma di segno positivo. Così, lo "antielettrone" è noto pure come *positrone* o *positone*. Per la scoperta teorica dell'antielettrone da parte di Dirac (1929, 1931) e per il riscontro empirico da parte di Carl Anderson (nel 1932) vedi, per esempio, R. Penrose, *La strada che porta alla realtà*, cit., pp. 622-625. [NdC]

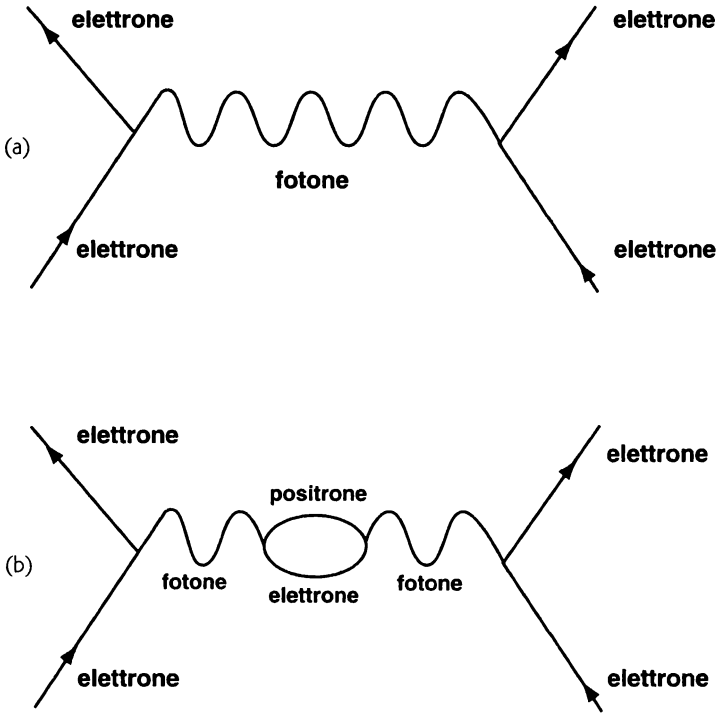



Figura 3.3 Diagrammi di Feynman

Quando due particelle (qui due elettroni che vengono dal basso della figura) interagiscono, possono farlo "semplicemente", scambiando un solo fotone – figura (a) in alto. Ma questo fotone può materializzarsi e poi smaterializzarsi lungo il cammino. Nello schema in basso (b), per esempio, crea una coppia elettrone-positrone che ricrea in seguito il fotone. Se si tiene conto di un evento del genere, la descrizione dei due elettroni di partenza non è più la stessa. Questa è solo la "prima correzione". Anzi, possono capitare al fotone delle vicende molto più complicate, che comportano correzioni di ordine 2, 3, 4... La fisica quantistica esige di tener conto dell'infinità di queste correzioni per il più piccolo calcolo. Questa notevolissima difficoltà ha portato a incorporare nella fisica quantistica l'idea di rinormalizzazione.

l'elettrone è infinita. Appena si ammettesse ciò, ci troveremmo immediatamente in un serio imbarazzo: stando alla relatività, l'energia è massa; l'elettrone avrebbe allora, contrariamente all'esperienza, una massa infinita...

Bisogna, dunque, trovare una scappatoia. Per esempio,

possiamo paragonare lo stato del campo con un elettrone, diciamo F_1, con lo stato vuoto F_0. L'energia dell'elettrone viene stimata come differenza tra l'energia (infinita) di F_1 e quella (anch'essa infinita) di F_0. È doveroso notare che in un problema dello stesso genere ci si imbatte anche nella fisica non quantistica: l'elettrone, considerato come particella puntiforme, prende nel campo che crea un'energia anche questa infinita. Se si rinuncia a considerarlo come puntiforme, si ritorna alla fisica quantistica con i problemi sopra descritti.

3.8 La materia "rinormalizzata"

Il trattamento delle equazioni della teoria quantistica dei campi fa dunque comparire degli infiniti, delle "divergenze". In seguito ai lavori di Sin-Itiro Tomonaga (1906-1979), Julian Schwinger (1918-1994) e Richard Feynman (1918-1988), che datano dalla fine degli anni Quaranta del Novecento, si è fatta luce sulla natura del problema. I fisici non sono riusciti a risolvere il problema, ma l'hanno, per così dire, scavalcato: è la teoria della *rinormalizzazione*. Non si saprà mai cosa sia veramente l'energia o la massa di un elettrone; ma non si cercherà di saperlo, e ci si contenterà di una procedura che permetta di calcolare la sua massa rinormalizzata. Con questa ricetta, l'applicazione della teoria consentirà di calcolare – con eccellente accordo sperimentale – qualsiasi quantità misurabile.

L'idea fisica che permette di sbarazzarsi di questo infinito è la seguente. Immaginiamo che si possa separare l'elettrone dalla sua carica, dunque dal campo elettrico e dall'energia associata. All'elettrone "nudo", spogliato del campo elettromagnetico che normalmente lo riveste, si attribuisce massa infinita; alla parte elettrica si associa di nuovo energia infinita. Ma, di fatto, non si può osservare l'elettrone senza il campo che gli è proprio. A quest'ultimo si deve, infine, associare la somma della massa nuda (infinita) con l'energia associata al campo elettromagnetico generato dalla sua carica – energia che è infinita e negativa (si ricordi che la massa e l'energia sono equiva-

lenti). Tutta la sottigliezza viene dal fatto che le cose possono essere combinate in modo che questa differenza tra due infiniti risulti finita. Gli infiniti ci sono sempre, ma vengono eliminati dalle quantità osservabili; sono dei semplici intermediari per il calcolo. Questo, in un certo modo, è come cambiare il livello di riferimento per misurare le masse o le energie, un po' come la scelta di misurare l'altitudine di un aereo in rapporto al suolo piuttosto che in rapporto al livello del mare. Detto altrimenti, la fisica quantistica considera solo differenze di energia, e non delle energie. Questo gioco di prestigio matematico sbarazza la descrizione dell'elettrone dagli infiniti che minacciavano di rendere assurda la teoria.

Questa procedura di rinormalizzazione viene applicata in modo analogo alle altre interazioni, come le interazioni nucleari forte e debole, che governano i comportamenti interparticellari nei nuclei atomici, e nelle reazioni nucleari. La famiglia delle trasformazioni che fanno passare da una quantità "nuda" (infinita) a una quantità "vestita" (finita) è stata chiamata "gruppo di rinormalizzazione". Di fatto, questo concetto così ricco ha persino delle applicazioni fuori dalla fisica delle alte energie: nella maggior parte delle discipline in cui appaiono degli infiniti alle piccole scale.

La rinormalizzazione che permette di eliminare le divergenze di una teoria è un grande successo sotto il profilo operativo.[13] Gli infiniti non hanno rovesciato la teoria, al contrario hanno permesso di approfondirla. Eppure, malgrado il suo rigore matematico, la rinormalizzazione appare un po' come un virtuosismo (la sottrazione di un infinito dall'altro) di difficile giustificazione sul piano concettuale. Inoltre, essa si applica solo alle teorie che descrivono interazioni elettromagnetiche deboli e forti – interazioni che vengono raggruppate sotto il nome di "modello standard" della fisica delle particelle. È invece inapplicabile alla gravitazione. Di conseguenza, altre vie devono essere esplorate per la comprensione della natura fisica.

13. Vedi, per esempio, R. Penrose, *La strada che porta alla realtà*, cit., pp. 675-679. [NdC]

Le particelle elementari sono puntiformi?

In linea di principio, nessuna idea della fisica dovrebbe fare appello all'infinito. Tuttavia, l'infinitamente piccolo è onnipresente nella fisica delle particelle. I fisici hanno avuto le loro buone ragioni per trattare i costituenti elementari come puntiformi, e dunque infinitamente piccoli. Vi sono arrivati per gradi. Muovendo dalla nostra scala macroscopica, governata dalle leggi della fisica classica, sono scesi di livello in livello fino alle "taglie" molto piccole, cioè nel dominio dove comandano le leggi quantistiche. L'indagine delle scale atomica, poi nucleare, infine subnucleare ha fatto loro conoscere comportamenti sempre più sorprendenti. Sotto il milionesimo di miliardesimo di metro tutto funziona come se le particelle che interagiscono fossero infinitamente piccole. I fisici hanno dunque elaborato delle teorie basate sull'ipotesi che queste particelle – elettroni e quark – siano puntiformi e che interagiscano in modo puntuale. Come abbiamo visto, questa ipotesi ha inizialmente fatto emergere enormi difficoltà tecniche. Ma tali difficoltà sono state infine risolte grazie alla rinormalizzazione: la prima delle teorie basate su questa procedura, l'elettrodinamica quantistica che descrive le interazioni tra elettroni e fotoni, è divenuta la teoria più precisa che sia mai stata elaborata! Incoraggiati dal successo, i fisici hanno formulato teorie sullo stesso modello per descrivere le altre interazioni. Hanno ottenuto il "modello standard" che rende conto brillantemente delle interazioni delle varie particelle. Ma è proprio vero che i costituenti elementari sono puntiformi?

3.9 Le superstringhe

Nella fisica di base si contrappongono due concezioni: da un lato il modello standard con le sue teorie quantistiche e le sue interazioni locali tra particelle puntiformi; dall'altro la relatività generale, in cui la gravitazione è un risultato della deformazione dello spazio-tempo. Che fare? Considerare la relatività generale come il versante classico di una teoria quantistica che dobbiamo ancora escogitare? Siffatta teoria della

gravità quantistica sarebbe insieme una teoria quantistica dello spazio e del tempo. Orbene, il modello standard e le teorie fisiche sono costruiti sulla nozione di spazio e di tempo continui. Qualsiasi modificazione di queste fondamenta rischierebbe di far vacillare l'intero edificio. Nondimeno, alle piccole distanze inferiori a 10^{-35} m (la cosiddetta *lunghezza di Planck*) è verosimile che le incertezze dovute alla teoria quantistica perturbino la struttura dello spazio-tempo. Come? Non si sa.

Stando a certi teorici, i costituenti fondamentali della materia (quark, leptoni, bosoni) non sarebbero particelle puntiformi (di dimensione 0), ma delle entità longilinee vibranti dette "supercorde" o "superstringhe" (di dimensione 1). Sorta di piccola struttura filiforme, una superstringa sarebbe meno singolare che una particella puntiforme – cosa che potrebbe facilitare una formulazione quantistica della gravitazione. A seconda che una stringa (corda) vibri o si avvolga in un modo o in un altro, noi la vedremmo come un tipo o un altro di particella. Una stringa potrebbe essere chiusa (sarebbe il caso del *gravitone*, vettore della gravitazione linearizzata) oppure aperta (per le altre specie). Le interazioni tra particelle sono descritte in termini di saldatura e di scissione di stringhe (corde) aperte o chiuse.

Ma c'è un prezzo da pagare per questa bella progressione verso l'unificazione: bisogna supporre che lo spazio-tempo, descritto ordinariamente ricorrendo alle tre dimensioni dello spazio e a un'altra dimensione per il tempo, acquisisca cinque o sei dimensioni supplementari (tutte spaziali). Questo quadro ampliato potrebbe consentire di risolvere alcuni problemi circa gli infiniti. Eppure, nella vita quotidiana non vediamo le dimensioni supplementari dello spazio e nemmeno il carattere longilineo degli oggetti fondamentali. Diverse versioni della teoria delle superstringhe spiegano la cosa in modi differenti. In alcune versioni le dimensioni supplementari potrebbero essere "ripiegate su se stesse" (con un raggio di ripiegamento prossimo alla lunghezza di Planck) ed esse sarebbero totalmente impercettibili.

La canna dell'acqua possiede una lunghezza (dimensione primaria) e due dimensioni supplementari che fissano il suo diametro, ma la differenza è così grande che, da lontano, noi

la percepiamo come un filo di spessore trascurabile, cioè come una linea a una sola dimensione. Solo a breve distanza vengono percepite le due dimensioni supplementari (ma sono loro che permettono all'acqua di scorrere dentro la canna!). Analogamente, le dimensioni nascoste dell'Universo forse ci sono, ma così piccole che noi non riusciamo a vederle.

3.10 Verso la scomparsa degli infiniti?

Se degli infiniti fanno la loro comparsa nella teoria quantistica, è perché i calcoli dell'energia fanno intervenire delle scale di interazione estremamente piccole: più si è vicini a una sorgente di radiazione più il campo diventa intenso, e quindi la sua energia diventa alta, fino all'infinito. In effetti, non c'è ragione di fermarsi di fronte all'infinitamente piccolo dal momento che lo spazio, lui, non si ferma. È così che si producono le divergenze.

Ma se la struttura dello spazio a scala piccolissima non fosse continua ma granulare, i calcoli dell'energia dovrebbero fermarsi a una certa scala detta "di separazione". Gli integrali potrebbero allora convergere, cioè assumere dei valori finiti. Proprio questo si produce, in un certo qual modo, nella teoria delle stringhe. Le loro dimensioni, non nulle, (per esempio, dell'ordine della lunghezza di Planck) costituirebbero una separazione siffatta. Altri approcci quantistici alla gravità,[14] come la gravità ad "anelli" o le geometrie non commutative, introducono ugualmente delle scale di taglio nello spazio-tempo.

Uno degli aspetti interessanti di una natura granulare dello spazio-tempo è che promette di aprire la strada a una descrizione quantistica della gravitazione. L'impossibilità di rinormalizzare questa interazione non costituirebbe più un handicap. Questa via viene già sfruttata in modo naturale nelle teorie della "geometrodinamica quantistica", che noi descriveremo brevemente nell'ultimo Capitolo.

14. Vedi, per esempio, M. Lachièze-Rey, *Au-delà de l'espace et du temps*, citato in bibliografia.

4

SINGOLARITÀ E TEMPO ZERO

> Noi (la indivisa divinità che opera in noi) abbiamo sognato il mondo. Lo abbiamo sognato resistente, misterioso, visibile, ubiquo nello spazio e fermo nel tempo; ma abbiamo ammesso nella sua architettura tenui ed eterni interstizi di assurdità, per sapere che è finito.
>
> JORGE LUIS BORGES

4.1 L'infinito e il buco nero

Creature ibride partorite dalla relatività e dalla meccanica quantistica, i buchi neri ci danno un assaggio di qualche problema esemplare concernente l'infinito.

L'idea risale agli astronomi John Michell (1724-1793) e Pierre-Simon de Laplace (1749-1827), alla fine del XVIII secolo. Un buco nero è un corpo talmente condensato, dal campo gravitazionale così intenso, che impedisce a qualsiasi materia o radiazione di andarsene. Poiché non si lascia scappare alcun raggio luminoso, l'astro sarebbe dunque invisibile. Questa condizione esige un raggio più piccolo di un certo valore critico, oggi detto *raggio di Schwarzschild*: 3 km per un corpo della massa del Sole, 1 cm soltanto per un corpo della massa della Terra. Ciò dà un'idea dell'estrema concentrazione di materia necessaria per formare un buco nero.

La teoria della relatività generale provvede una base teorica per il concetto di buco nero. Nel dicembre 1915, solo un

mese dopo la pubblicazione degli articoli fondamentali di Einstein, Karl Schwarzschild scopre, nel quadro di questa teoria, una soluzione che descrive il campo gravitazionale di una massa sferica circondata da vuoto. La corrispondente geometria dello spazio-tempo si applica notevolmente bene, per esempio, al campo gravitazionale che regna nel Sistema solare (il Sole è praticamente sferico, e il resto della materia del Sistema solare ha in rapporto a quella del Sole una massa così esigua che la si può assimilare al vuoto). Ma l'interesse della soluzione di Schwarzschild va ben oltre. Non dipende dalla natura dell'astro che lo genera, ma unicamente dalla sua massa. Ciò permette di applicarla al caso di una massa (sorgente di gravitazione) estremamente condensata, al limite strettamente puntiforme. È la versione "relativistica" del buco nero.

4.1.1 Uno strano orizzonte

Le proprietà specifiche dei buchi neri della relatività dipendono dalle caratteristiche strane della superficie di Schwarzschild. Questa appare come un'autentica frontiera del buco nero e fa di esso un sistema chiuso, pressoché un mondo a parte, separato dal nostro. Anzi, quello che viene emesso a partire dalla superficie Schwarzschild (o *a fortiori* dal suo interno), in particolare la luce, non può mai "uscire". Tutte le direzioni di propagazione lecite sono focalizzate al centro del campo gravitazionale. Questa superficie-trappola segnala l'imprigionamento definitivo della luce. È detta *orizzonte degli eventi*: non si può vedere alcun evento che capiti all'interno di questa frontiera dello spazio-tempo.

Questo orizzonte presenta un'analogia con l'orizzonte terrestre dovuto alla curvatura del nostro Globo, frontiera fittizia al di là della quale il navigatore non vede più nulla. L'orizzonte del buco nero è una frontiera fittizia di spazio-tempo. Ma l'orizzonte terrestre è *relativo*: il cerchio centrato sul navigatore si sposta con lui (si ricordi che è mediante un ragionamento sulla relatività dell'orizzonte che Giordano Bruno era perve-

nuto ad affermare l'infinità dell'Universo).[1] Per contrasto, l'orizzonte del buco nero è *assoluto*. Indipendente da qualsiasi osservatore, divide lo spazio-tempo, cioè l'insieme degli eventi, in due categorie. Il dominio esterno, in cui è possibile comunicare "normalmente" mediante segnali luminosi, costituisce il nostro Universo ordinario. In compenso, i raggi luminosi del dominio interno sono tutti focalizzati al centro. La relatività generale ci dice che la comunicazione tra gli eventi viene assoggettata a vincoli severi.

L'orizzonte degli eventi svolge il ruolo di una membrana a senso unico, che lascia entrare materia e luce, ma non c'è ritorno possibile. Eppure, si tratta solo di una superficie geometrica senza una consistenza materiale. Sotto certe condizioni, un astronauta potrebbe attraversare questa superficie immateriale per esplorare l'interno del buco nero, ma non potrebbe più uscirne per venirci a raccontare cosa ha scoperto.

4.1.2 I falsi infiniti del buco nero

La trattazione relativistica del buco nero fa sorgere delle difficoltà sotto la forma dei valori infiniti che prendono certe grandezze fisiche e geometriche.

I primi fanno la loro comparsa quando ci si interessa della geometria dello spazio-tempo in un intorno dell'orizzonte del buco nero (superficie sferica, o leggermente appiattita ai poli, se il buco nero è in rotazione). Anzi, sulla superficie stessa la soluzione di Schwarzschild sembra indicare che le proprietà dello spazio e del tempo diventano "patologiche". La lunghezza dei regoli e l'andamento degli orologi, che consentono di misurare distanze e durate, funzionano in modo aberrante, avvicinandosi a questa superficie. L'una tende a diventare nulla, l'altra infinita. Arthur Eddington lo diceva con queste parole: "C'è un cerchio magico all'interno del quale nessuna misura può più guidarci".

Il problema, posto così, restò a lungo oggetto di discussioni

1. Vedi nota 16 del Capitolo 1. [NdC]

appassionate e fu considerato come un difetto della relatività generale. Tuttavia, in un importante articolo[2] del 1933, Georges Lemaître fu il primo a riconoscere che la superficie del buco nero non è una vera singolarità: se vi compaiono degli infiniti, è a causa di una cattiva scelta del sistema delle coordinate. Per provare quel che diceva, costruì un sistema di coordinate equivalente in cui scomparivano gli effetti "magici" del raggio critico. Gli infiniti dell'orizzonte sono dei "falsi infiniti": totalmente artificiali, non corrispondono ad alcuna situazione fisica anormale.

Sfortunatamente, l'argomento di Lemaître passò inosservato, confuso in un articolo dal taglio cosmologico più generale (invece di costituire l'oggetto di una pubblicazione distinta, possibilmente in inglese). Lo sviluppo della teoria relativistica del buco nero resterà bloccato per un trentennio. Il carattere artificiale della singolarità di Schwarzschild sarà riscoperto solo negli anni Sessanta del Novecento, data a partire dalla quale gli affascinanti modelli relativistici dei buchi neri cominceranno a decollare.[3]

Compaiono anche altre peculiarità pertinenti al raggio critico. A rigore, non possiamo osservare un buco nero. Ma la curvatura dello spazio-tempo nel suo intorno è reale. La visione più ravvicinata possibile corrisponderebbe allora a una ricezione della luce emessa vicinissimo all'orizzonte, appena all'esterno. L'intensa gravitazione generata dal buco nero crea distorsioni temporali: più la luce è emessa vicino all'orizzonte, più impiega tempo per raggiungerci. Al limite, la durata diventerebbe infinita per un raggio luminoso emesso all'orizzonte: un modo per dire che non arriverebbe mai.

Dal punto di vista dell'osservatore lontano, la stella che sta collassando sembra così rallentare indefinitamente la sua contrazione. I fenomeni, che si svolgono in realtà a velocità normale, sembrerebbero allora rallentati; al limite, congelati sotto il

2. "L'Univers en expansion", in *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, serie A, vol. 3, 1933, pp. 51-85. Per i contributi del sacerdote belga ai modelli a Big Bang vedi J.-P. Luminet, *L'invenzione del Big Bang*, cit.

3. Vedi J.-P. Luminet, *L'invenzione del Big Bang*, cit.

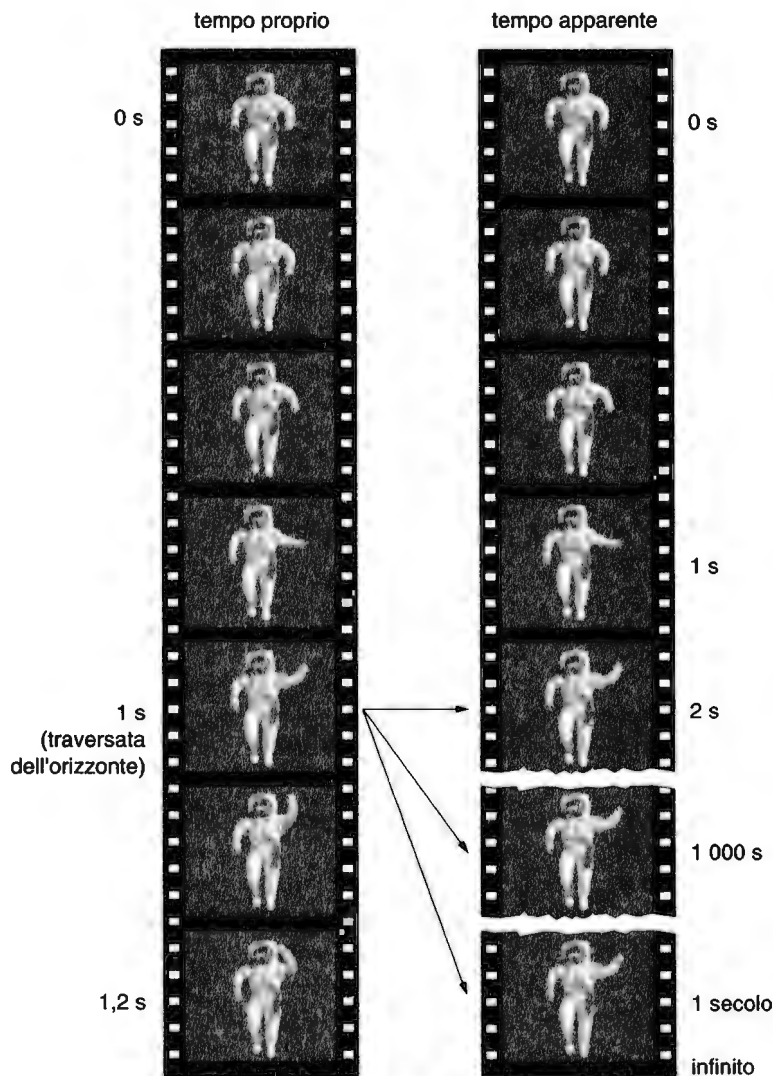



Figura 4.1 Il tempo congelato del buco nero

Un astronauta decide di esplorare l'interno di un buco nero. Fa un ultimo gesto di saluto all'umanità, prima di scomparire. Una telecamera collocata a bordo del vascello lo filma, e invia i segnali a una stazione orbitale. I fotogrammi a sinistra (tempo proprio) mostrano la scena come è realmente vissuta dall'esploratore. Mentre manda l'ultimo saluto, attraversa, senza rendersi conto, la frontiera del buco nero (orizzonte) e il suo gesto termina nel lasso di 1, 2 secondi nel fondo del buco nero (singolarità). La durata del suo ultimo saluto è dunque finita. I fotogrammi di destra (tempo apparente) mostrano la scena come viene vista dalla stazione orbitale. All'inizio i due film sono identici; poi il film della situazione apparente si stiracchia indefinitamente, e mostra l'astronauta eternamente fissato nel mezzo del suo congedo: la durata del suo ultimo saluto è infinita.

profilo temporale: ecco un'illustrazione notevolissima dell'elasticità del tempo predetta dalla teoria della relatività generale. Il tempo può scorrere differentemente per due osservatori distinti. La durata di un fenomeno misurato dall'orologio di un osservatore lontano è una *durata apparente*. L'aggettivo qualifica la durata misurata da un osservatore che non partecipa al fenomeno. In relatività generale ci sono tante durate apparenti, a valori differenti, quanti osservatori esterni possibili. Al contrario, la durata propria viene definita in modo univoco come quella misurata da un orologio solidale al fenomeno studiato.

Qui il fenomeno – collasso della stella e formazione del buco nero – è estremo. Le durate apparenti sono infinite, mentre la durata propria è finita! (figura 4.1)

4.1.3 I veri infiniti del buco nero

Nonostante questi infiniti degli orizzonti che rendono alcuni eventi inosservabili, la fisica non incontra qui alcun problema particolare.

In compenso, la situazione diviene più complessa quando ci si interessa dell'*interno* del buco nero. D'altronde, è utile precisare che il buco nero è un fenomeno dinamico e non un oggetto statico: si tratta di un collasso gravitazionale che nulla può fermare, e dove è impossibile restare immobili; tutte le traiettorie, quelle delle particelle materiali come quelle dei raggi luminosi, convergono inesorabilmente al centro. Quest'ultimo appare allora come un punto particolarissimo, quello che i fisici chiamano una singolarità dello spazio-tempo. Materia e curvatura là sono infinitamente compressi!

Questa singolarità ha un significato peculiare, poiché segna la fine della storia di qualsiasi particella che vi stia cadendo dentro – per esempio, una navicella spaziale in caduta libera che abbia attraversato l'orizzonte del buco. Per questa navicella, tra l'attraversamento dell'orizzonte e lo schianto nella singolarità centrale, trascorre un intervallo di tempo proprio *finito*. Per esempio, all'interno di un buco nero di 10 masse solari, la durata di vita propria prima dell'annientamento nella singolarità non supera

un decimillesimo di secondo. Per un buco nero gigante celato nel cuore di una galassia, il periodo di attesa potrebbe durare anche un'ora. La singolarità del buco nero appare come un bordo dello spazio-tempo. Allo stesso titolo dell'infinito spaziale segna davvero una *fine del tempo*, un'assenza di futuro per ogni esploratore del buco nero (ancora la figura 4.1). Il paradosso pare qui legato al carattere finito, e non infinito, del tempo!

Ma la singolarità è definita anche mediante una curvatura infinita. Ecco un caso esemplare nella storia della fisica in cui una grandezza reale e misurabile (la curvatura) assume un valore infinito.

4.1.4 L'infinito censurato

I fisici si sono interrogati se, pur mantenendosi nel quadro della relatività, avrebbero potuto evitare questa singolarità in cui delle grandezze fisiche diventano infinite, e dunque "fuori misura". La risposta è negativa. Alla fine degli anni Sessanta del Novecento, Stephen Hawking e Roger Penrose hanno dimostrato la presenza ineluttabile della singolarità nel processo di collasso gravitazionale. Le singolarità non sono artifici matematici, diversamente dai casi contemplati poche pagine prima. Al contrario, fanno parte integrante della relatività generale, sono conseguenze inevitabili del carattere attrattivo e "autoaccelerato" della gravitazione.

Il collasso gravitazionale di una stella che termina in una singolarità ammette due varianti, a seconda che si formi o no un buco nero. Nel caso della formazione di un buco nero, l'orizzonte degli eventi cela all'esterno tutto quello che capita all'interno, compreso l'eventuale schiacciamento finale della materia nella singolarità. Quest'ultima è "censurata". Al fisico, che vive nello spazio-tempo esterno al buco nero, poco importa che la singolarità e i suoi infiniti si dispieghino o no: l'orizzonte impedisce di saperne alcunché. Le leggi della natura, e persino il buon senso, potrebbero, al limite, venir violate all'interno del buco nero, senza che la comunità dei fisici venga mai a saperlo...

Ma potremmo immaginare la formazione di una singolarità senza che l'orizzonte di un buco nero ce la nasconda. Allora, è tutt'altra cosa. Siffatta singolarità viene detta "nuda", e nulla impedisce allora a particelle e segnali luminosi di andarsene. Suscettibili di giungere a grande distanza potrebbero "malignamente" perturbare qualsiasi sistema fisico, invalidando calcoli e predizioni. Una situazione del genere rappresenterebbe la rovina di chi fa scienza, in quanto le leggi fisiche ben note e corroborate in laboratorio potrebbero da un giorno all'altro venir contraddette dalla influenza imprevedibile di una singolarità nuda. È superfluo precisare che non si sono mai osservate nell'Universo delle singolarità nude. Ma ciò non prova affatto che non esistano.

Roger Penrose ha formulato l'ipotesi che una sorta di *censura cosmica* eviterebbe tale situazione così imbarazzante: la Natura vieterebbe le singolarità nude, un orizzonte dovrebbe sempre "vestire" una singolarità. Non si è mai potuto dimostrare rigorosamente nel quadro della relatività questa congettura così "puritana". Si ritiene generalmente che sia corretta nelle situazioni che non si staccano troppo dalla simmetria sferica. In compenso, la questione resta completamente aperta nelle situazioni estreme.[4]

4.1.5 L'eliminazione dell'infinito

Anche se l'ipotesi della censura cosmica fosse vera, non sarebbero perciò stesso risolte tutte le anomalie della gravitazione. Altri tipi di singolarità potrebbero comunque esistere: singolarità nascoste nel fondo dei buchi neri in rotazione. Sarebbero suscettibili di generare bizzarrie come il passaggio verso "altri universi" o il viaggio nel passato. Il vero problema non è dunque di sapere se le singolarità gravitazionali offendono o no il pudore, ma di accertare se esistano nell'Universo reale. In altre parole, la teoria della relatività generale, che predice tali

4. Vedi le stesse osservazioni di R. Penrose in *La strada che porta alla realtà*, cit., pp. 714-768. [NdC]

configurazioni con la comparsa di infiniti, è sempre corretta?

La scienza ha più volte partorito teorie fisiche che possedevano degli infiniti. Questi sono stati eliminati mettendo a punto teorie più complete, dotate di un più largo dominio di validità. La relatività generale, appunto, benché sia *attualmente* la migliore teoria della gravitazione è manifestamente incompleta. Di fatto, non si accorda con i principi della fisica quantistica. Questo secondo pilastro della scienza contemporanea governa l'evoluzione del mondo microscopico; per esempio, le particelle elementari sottoposte a forze (elettromagnetiche, nucleari) con raggi d'azione assai piccoli. La fisica dà una descrizione "sfumata" dei fenomeni, in quanto i risultati delle misure possono essere calcolati solo in termini di probabilità. Alcune delle sue implicazioni sembrano urtare il senso comune; ma, dalla sua nascita agli inizi del XX secolo, ha dato prova di grandissima efficacia nella descrizione del mondo reale e i suoi successi teorici e tecnologici (laser, transistor) ormai non si contano. Su scala astronomica gli effetti quantici non svolgono pressoché alcun ruolo e possiamo applicare allora una versione "classica" della fisica. È il caso in particolare della gravitazione, che usualmente viene descritta dalla relatività generale. Tuttavia, il fenomeno delle singolarità riporta l'infinitamente piccolo nella relatività. Implicando la struttura dello spazio-tempo alle scale microscopiche, sottolinea l'incompatibilità tra le due teorie e la lunghezza di Planck (pari a 10^{-35} metri) segna quasi certamente la soglia sopra la quale si può ancora considerare lo spazio-tempo come "liscio", il limite sotto cui non si possono più applicare fisica e relatività classiche. Infatti, sotto tale soglia, effetti quantistici che noi non conosciamo modificano con tutta probabilità il tessuto dello spazio-tempo. Come aveva intuito nel primissimo Novecento Dmitrij Ivanovič Mendeleev (1834-1907), celebre soprattutto per aver escogitato la tavola periodica degli elementi, tale tessuto potrebbe essere non più continuo, ma granulare, come lo sono la materia e l'energia (Mendeleev aveva formulato l'idea che lo spazio fosse costituito da "particelle" un milione di volte più piccole dell'atomo di idrogeno).

Si può allora interpretare questa scala di Planck come un "orizzonte microscopico" che occulta gli infiniti gravitazionali delle singolarità. Ovviamente, ciò non è del tutto soddisfacente, in quanto tale orizzonte è solo quello della nostra ignoranza.

4.2 L'inizio del tempo

Il problema dell'infinità del tempo si pone in termini piuttosto differenti da quella dello spazio. Osserviamo in modo diverso l'espansione dell'Universo, che si esprime nella crescita di qualsiasi distanza cosmica col tempo. Dal punto di vista quantitativo, si esprime tutto questo attraverso un intermediario di campione di lunghezza cosmica che dipende dal tempo, il fattore di scala $R(t)$: ogni configurazione cosmica di estensione sufficientemente grande – per esempio, la distanza tra una galassia lontana e la nostra, o magari il diametro dello spazio, se questo è finito – vede aumentare le sue dimensioni proporzionalmente a $R(t)$. La questione della finitezza del tempo viene posta allora in termini rigorosissimi. Il tempo cosmico t si prolunga, nel passato dell'Universo, fino a un valore infinito? Oppure è limitato a un valore finito? Sotto un profilo un po' più tecnico, il cosmologo si domanda se ci sia mai stato un istante in cui il fattore di scala e, di conseguenza, tutte le lunghezze cosmiche abbiano avuto valore zero.

Stando alla relatività, la risposta dipende dal contenuto dell'Universo. Se le sue proprietà sono quelle della materia e della radiazione che noi già conosciamo, allora il fattore di scala R diminuisce inevitabilmente col tempo passato; ed esiste necessariamente un istante t_0 del passato, in cui il suo valore $R(t_0)$ è zero. La durata finita $t_U = t_{oggi} - t_0$ rappresenta quella che si chiama "l'età dell'Universo". Questo è ciò che ci dicono i modelli del Big Bang: essi vengono definiti come quelli in cui l'espansione cosmica è trascorsa solo da una durata finita.

Stando a questi modelli, esiste un tempo minimo t_0 (talvolta lo si chiama appunto "tempo minimo") per la storia del nostro Universo. Calcoli e osservazioni lo situano a circa 14 mi-

liardi di anni nel passato. Tutto questo, ovviamente, esclude di considerare qualsiasi istante anteriore a t_0. La cosa implica che non possa esistere alcun oggetto la cui età possa superare t_U: i fatidici 14 miliardi di anni. Il che comporta che nessun orologio sia stato mai in grado di misurare una durata più lunga. Si tratta, dunque, di un limite finito al tempo (passato, in questo caso). Sottolineiamo che le età delle stelle che sono state misurate si distribuiscono appunto tra zero e 14 miliardi di anni. In sé, questa osservazione costituisce un argomento piuttosto diretto a favore dei modelli del Big Bang, ma questi sono stati ugualmente confermati da una pleiade di altri risultati.[5]

4.3 Lo spettro del tempo finito

Contrariamente alla finitezza dello spazio, il finito nel tempo sembra più spaventoso che l'infinito. Ne vediamo due ragioni possibili: la prima, perfettamente legittima, deriva dal fatto che tale limite temporale, nel passato, sembra presentarsi, come nel caso del buco nero, sotto la forma di una singolarità. Vedremo poche pagine avanti cosa dobbiamo pensarne. Ricordiamoci che il problema della finitezza spaziale è inciampato contro una siffatta questione del limite fino all'introduzione delle geometrie non euclidee e della topologia. La seconda ragione ha minor carattere fisico: la durata finita del passato contrasta il mito, ancor profondamente radicato, di un Universo senza evoluzione. Complessivamente, è per queste due ragioni che non pochi hanno cercato di sbarazzarsi non dell'infinito, ma proprio del carattere finito del tempo passato.

Una delle prime strade che venne imboccata, con non troppa chiarezza, fu quella della costante cosmologica λ (§ 1.15) in seguito ai contributi di Lemaître.[6] Questa costante ha un ruolo importantissimo, in quanto la sua presenza autorizza a delinea-

5. Vedi M. Lachièze-Rey, *Initiation à la cosmologie*, citato in bibliografia.
6. Per i particolari vedi J.-P. Luminet, *L'invenzione del Big Bang*, cit., in particolare pp. 123-128, 133-137, 139-145, 147-150. Vedi anche M. Lachièze-Rey, *Les avatars du vide*, cit.

re modelli di Universo secondo cui l'espansione durerebbe da un tempo passato estremamente lungo, per non dire infinito. Per opportuni valori di λ, le soluzioni delle equazioni della relatività generale non fanno intervenire alcuna singolarità nel passato. A detta di alcuni, l'Universo sarebbe anzitutto *contratto* in un tempo infinitamente lontano nel passato; avrebbe attraversato una fase di compressione minima, senza singolarità; infine, avrebbe poi avviato la fase attuale di dilatazione, per una durata infinita nel futuro.

I vincoli osservativi, individuati di recente, non ci autorizzano più a sostenere modelli del genere. Fin dal 1931, Lemaître aveva optato per modelli di Universo a passato temporale finito e dotati di una singolarità iniziale. Non pochi l'hanno accusato per questo di *concordismo*, cioè di aver subito l'influenza delle sue convinzioni religiose. Anzi, i modelli del Big Bang descrivono un Universo estremamente caldo e denso nella fase iniziale, pieno di radiazione; e ciò ricorderebbe, sostenevano i suoi detrattori, il *fiat lux* del *Genesi*. Lemaître, però, si è difeso vigorosamente da accuse del genere, rivendicando a ragione il carattere scientifico di quello che inizialmente aveva chiamato “atomo primevo”. Sembra piuttosto che in questo caso siano stati i suoi avversari, per esempio l'astronomo britannico Fred Hoyle (1915-2001), a essersi confusi. Del resto, è stato quest'ultimo a introdurre una locuzione come *Big Bang*: si tratta di uno straordinario controsenso, in quanto il vero Big Bang non è per nulla il grande botto di un'esplosione! Hoyle l'aveva fatto a scopo derisorio, ma quel termine doveva riscuotere successo.

Inizialmente, anche lo stesso Einstein ha reagito negativamente ai modelli del Big Bang, dichiarando: “No, mi ricorda troppo la creazione”. Il celebre astrofisico Arthur Eddington (1882-1944), avendo preso tale idea in uggia, aveva proposto già nel 1930 un modello in cui il valore della costante cosmologica era opportunamente aggiustato in modo da descrivere un Universo senza Big Bang, infinito nel passato e nel futuro. Lo spettro del Big Bang ha fatto poi rizzare i capelli in testa a non pochi altri creatori di cosmologie. Nel 1948 Hermann

Bondi e Thomas Gold (1920-2004) hanno immaginato un processo di "creazione continua" di materia, al solo scopo di poter costruire un modello alternativo al Big Bang, restando comunque in accordo con i dati osservativi circa l'espansione cosmica. Tale punto di vista esigeva che della materia fosse creata di continuo e dappertutto, in modo da mantenere costante la densità media dell'Universo, necessaria a un Universo stazionario, compensando la diluizione dovuta all'espansione. Per tutto questo bastava che un atomo di idrogeno fosse creato, per metro cubo di spazio, ogni 5 miliardi di anni!

Questo tentativo di restaurare il mito di un Universo stazionario che risulterebbe invariabile tanto nello spazio quanto nel tempo – una tesi formalizzata sotto il nome di "Principio Cosmologico Perfetto" – non mancava certo di fascino. Ma il corso degli eventi ha dato ragione a Lemaître: il riscontro osservativo dell'abbondanza di elementi leggeri, la scoperta della radiazione cosmologica di fondo e delle sua proprietà, l'età delle stelle, l'evoluzione delle galassie... tutti questi risultati militano a favore di una fase caldissima dell'Universo primordiale, e dunque dei modelli del Big Bang.

4.4 Lo spettro della singolarità

I modelli del Big Bang ci vietano di considerare istanti anteriori a t_0, dove il raggio di scala $R(t_0)$ sarebbe nullo. Ma lo stesso istante t_0 ha evocato problemi di infiniti analoghi a quelli che abbiamo già incontrato a proposito della singolarità del buco nero: l'Universo avrebbe dovuto essere concentrato in un volume infinitamente piccolo, infinitamente denso e di curvatura infinitamente grande. In alcuni modelli del Big Bang, quelli a espansione-contrazione, la stessa sorte attende l'Universo in un futuro finito, di varie decine di miliardi di anni. Avremmo allora un "Big Crunch"!

Come quella del buco nero, la singolarità iniziale segna una reale interruzione (verso il passato, questa volta) delle linee di universo del fluido cosmico, e dunque del tempo. Non viene

considerata come un *evento*. Per il matematico, non appartiene allo spazio-tempo, ma costituisce un *bordo temporale*, situato a una durata passata e finita. È una cosa difficile da digerire, tanto più che ci si è dato tanto da fare per eliminare l'esistenza di un bordo dello spazio! Il paradosso dipende insieme dal carattere finito del tempo, che corrisponde all'interruzione brutale delle linee di universo, e dal carattere inconcepibilmente infinito della densità e della curvatura.

I cosmologi hanno cercato di sbarazzarsi di questa mostruosità, con un impegno paragonabile a quello che è stato messo nel tentativo di eliminare la singolarità finale del buco nero. Hanno fatto di tutto per trovare modelli cosmologici privi di singolarità iniziale, a energia e curvature infinite. Poiché la costante cosmologica non bastava all'uopo, alcuni di loro hanno suggerito che l'utilizzo di ipotesi semplificatrici infondate aveva forse falsato i calcoli, facendo comparire nelle soluzioni delle equazioni una singolarità sprovvista di esistenza reale. Anche questo si è rivelato uno scacco. Anche in tal caso Lemaître, sin dal 1933, aveva delineato una dimostrazione di tutto rispetto che indicava come, mediante ipotesi ragionevoli, le singolarità cosmologiche derivano inesorabilmente dalla relatività generale. Anticipava così i celebri "teoremi sulle singolarità" che sono stati ridimostrati in modo più generale negli anni Sessanta e che hanno reso famosi i loro autori Stephen Hawking e Roger Penrose: una singolarità cosmica è inevitabile nel passato di qualsiasi modello d'Universo, purché esso soddisfi la relatività generale e contenga tanta materia quanta se ne è osservata. Si tratta di una sorta di teorema simmetrico a quello già dimostrato per il futuro dei buchi neri...

Ma vediamo ora l'unica soluzione per sbarazzarsi degli infiniti gravitazionali: uscire dal quadro della relatività generale classica. Si tratta di una via che pare ragionevole praticare, in quanto tutto spinge i fisici a credere che la comparsa di una singolarità, caratterizzata da grandezze infinite, indichi il limite di validità di una teoria. Del resto, abbiamo osservato che la relatività generale (come ogni altra teoria della gravitazione che è stata proposta) non è una teoria completa, in quanto non è in

grado di incorporare i precetti della fisica quantistica che descrive il mondo microscopico. In ogni caso, sembra estremamente temerario, e anche ingiustificato, estendere i risultati della relatività generale a distanze arbitrariamente piccole, *a fortiori* fino a una singolarità. Non lo si può fare nemmeno a scale spaziali inferiori alla lunghezza di Planck (10^{-35} metri), la quale svolge il ruolo di una sorta di orizzonte microscopico. Ignorando ciò che accade esattamente a tali dimensioni, i fisici ritengono che la geometria potrebbe divenire anch'essa soggetta a fluttuazioni quantistiche – fluttuazioni che la relatività non consente di prendere in considerazione.

Orbene, stando ai modelli del Big Bang, la ricostruzione del passato dell'evoluzione del fattore di scala dell'universo (vedi quanto si è detto sopra) conduce a un valore piccolo quanto 10^{-35} m. Il tempo corrispondente nella storia cosmica è detto "era di Planck": corrisponde a un istante t_{Planck} di poco posteriore (di 10^{-43} secondi) a t_0. I valori della temperatura e della densità erano enormi, rispettivamente 10^{32} K e 10^{94} g/cm^3. In condizioni così estreme non si può applicare la relatività generale, se non altro perché essa non è in grado di tener conto degli effetti quantistici, peraltro preponderanti: per cominciare a trattare questo periodo ci sarebbe bisogno imperativamente di una teoria della gravitazione quantistica, o almeno di una teoria che unifichi le quattro interazioni fondamentali.

La nostra fisica non ci consente, dunque, la ricostruzione del passato cosmico fino a t_0, cioè fino alla singolarità, ma solo fino a t_{Planck}. Qualsiasi tentativo di immaginare uno stato anteriore sfocia nell'incertezza quantistica, sicché possiamo dire che la storia dell'Universo non si è svolta solo a partire dall'era di Planck: non si tratta del "vero" inizio dell'Universo, ma di quello del periodo in cui siamo in grado di descriverlo e, in certa misura, di comprenderlo.[7] Ciò non cambia nulla nella descrizione della successiva evoluzione cosmica. Che si risalga nel passato

7. Nella teoria delle superstringhe (§ 3.9) certi nuovi modelli cosmologici permettono di eliminare la singolarità iniziale e di concepire un'era "prima del Big Bang" per la storia dell'Universo.

da oggi al t_{Planck}, o addirittura (in modo fittizio) fino a t_0, tutto verte su una differenza di 10^{-43} secondi che va messa a confronto con la durata dell'espansione, che è di miliardi di anni.

4.5 La cosmologia quantistica

Vorremmo dire qualcosa di più sull'era di Planck. Questo limite su cui inciampa la fisica, frontiera delle nostre conoscenze, per una volta non è dovuto a un infinito. Del resto, non è nemmeno qui il problema, dal momento che il quadro abituale della varietà spazio-tempo, continua e a quattro dimensioni, va completamente a pezzi.

L'idea della gravità quantistica, o della cosmologia quantistica che ne deriverebbe, è che a livello microscopico la geometria dell'Universo potrebbe essere "sfumata", paragonabile a una sorta di schiuma perpetuamente agitata da piccole fluttuazioni (figura 4.2). Si potrebbe compararla alla superficie di un oceano: visto dall'aereo l'oceano sembra liscio. Da un'altezza più bassa, la sua superficie appare sempre continua, ma si cominciano a distinguere alcuni movimenti che la agitano. Immerso nell'oceano, un nuotatore lo vede tumultuoso, addirittura discontinuo, perché delle onde si infrangono, proiettando delle gocce d'acqua che vanno in alto e poi cadono giù. Analogamente, lo spazio-tempo sembra continuo a scala umana, e persino a scala dei nuclei atomici, ma la sua schiuma potrebbe diventare rilevante alla scala di Planck. Le particelle elementari sarebbero forse delle "gocce" di spazio-tempo?

4.6 La geometrodinamica quantistica

Fino al momento presente non è stata stabilita alcuna teoria completamente coerente e calcolabile della gravità quantistica (ovvero, una cosmologia quantistica). Si sono tentate non poche descrizioni preliminari, di cui alcune sono davvero affascinanti. La *geometrodinamica quantistica* è stata proposta

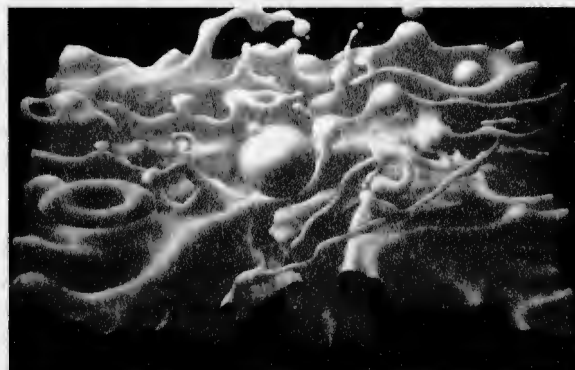



Figura 4.2 Tre rappresentazioni dello spazio

Lo spazio non è forse tanto "liscio" quanto noi lo crediamo. Stando a certe concezioni della gravità quantistica, ci apparirebbe liscio solo per il fatto che ne abbiamo una visione grossolana (1), come la superficie di un oceano vista da un aereo ad alta quota. Una visione a migliore risoluzione (2) ci rivela, invece, un andamento più tormentato. Alle scale più microscopiche, prossime alla grandezza di Planck, la sua struttura potrebbe essere totalmente caotica (3). Fonte: © J.-M. Joly/Ciel & Espace. Vedi inserto a colori, tavola IX.

da John Wheeler e Bryce de Witt (1923-2004) alla fine degli anni Sessanta del Novecento. Essa scaturisce dall'osservazione che la teoria della relatività generale può venir interpretata come un "geometrodinamica" classica, cioè una dinamica della geometria spaziale dell'Universo. La geometrodinamica quantistica si dedica a una disposizione quantistica di tale dinamica della geometria. Questa teoria si propone di trattare la geometria dello spazio-tempo allo stesso modo in cui l'ordinaria fisica quantistica tratta la materia. Anzitutto, si chiama "superspazio" l'insieme di tutte le configurazioni possibili che può prendere lo spazio (tridimensionale) a un dato istante, finite o infinite, di curvature più o meno grandi, ecc. Ciascuna di queste configurazioni si chiama "stato" dell'Universo (a rigore, la descrizione di uno stato deve parimenti includere la configurazione della materia in questo stato). Così, ogni stato dell'Universo viene rappresentato da un elemento (un "punto") del superspazio. In questo approccio, l'infinito compare in un modo inedito, in quanto il numero delle dimensioni del superspazio è infinito. Contrariamente a quello che si potrebbe ingenuamente pensare, tutto questo è tranquillamente concepibile dal punto di vista matematico.

Quello che chiamiamo un modello cosmologico, nel senso abituale (cioè non quantistico), è una successione temporale (una "storia") di stati dello spazio e del suo contenuto. In altri termini, una successione di punti del superspazio: una "curva" del superspazio. Tutto questo generalizza la nozione di traiettoria di una particella nello spazio, poiché un modello di Universo si trasforma in una sorta di traiettoria nel superspazio.

Orbene, la meccanica quantistica ordinaria fa sparire la nozione di traiettoria di una particella. In un linguaggio un po' immaginoso, si potrebbe dire che essa rende le traiettorie "sfumate". Del resto, un'interpretazione recente della fisica quantistica consiste nel dichiarare effettivamente che lo *spazio delle fasi* del sistema diviene sfumato, in un senso matematicamente rigoroso: la nozione di spazio sfumato, sinonimo di "non commutativo", viene dalla geometria algebrica. Il passaggio dalla fisica classica a quella quantistica corrisponde alla

trasformazione di una certa geometria (quella dello spazio delle fasi) in una geometria non commutativa.[8]

Le cose potrebbero essere simili per la geometrodinamica quantistica, vista come una dinamica quantistica nel superspazio. Semplificando, si tratta di rendere "sfumato" quest'ultimo. E così anche i punti e le "traiettorie" che essi comportano. Uno "stato quantico dell'Universo" non è più rappresentato da un punto (come è il caso dello stato classico), ma da una "macchia" che si estende nel superspazio. Questa macchia rappresenta il supporto della "funzione d'onda dell'Universo", l'oggetto fondamentale della cosmologia quantistica. Detto altrimenti, non si può più associare all'Universo una geometria precisa che sarebbe rappresentata da un punto del superspazio. Si può solo evocare un insieme di geometrie possibili (la "macchia"), ciascuna con la sua probabilità.

Ci resta da calcolare questa probabilità, esaminarne il comportamento e soprattutto il significato. Le prime versioni della cosmologia quantistica fanno pensare che sia retta da un'equazione detta di Wheeler-de Witt. Questa equazione complicatissima è inutilizzabile, in pratica, nella sua forma generale. La sola possibilità di trovarne delle soluzioni consiste nel semplificare considerevolmente il problema. Per esempio, possiamo limitarci a considerare una famiglia ristretta di geometrie semplici, supponendo lo spazio a curvatura costante. Invece di considerare tutti i punti del superspazio, se ne considera solo una parte, piuttosto limitata, un sottoinsieme cui spetta il nome di "minisuperspazio". Il problema è ricondotto così alla soluzione delle equazioni nel minisuperspazio. Allo scopo, occorre ancora specificare delle condizioni ai limiti per l'Universo. Queste condizionano il comportamento spazio-temporale della funzione d'onda dell'Universo, pressappoco allo stesso modo in cui la traiettoria di una particella in meccanica classica è specificata dalla posizione e dalla velocità iniziali della particella. Nel caso della

8. Per maggiori dettagli vedi M. Lachièze-Rey, *Au delà de l'espace et du temps*, cit.

cosmologia tutto questo solleva questioni fondamentali, oggi ben lontane dall'essere risolte. Sono stati proposti suggerimenti di vario tipo, soprattutto da quella che era una volta la "scuola russa" (Andrei Linde e Alexander Vilenkin) e dalla scuola anglosassone (Jim Hartle e Stephen Hawking): per esempio (detto in termini molto semplici), il modello quantistico di Hartle e Hawking considera solo geometrie spazio-temporali senza frontiere e senza bordo – come la superficie di una sfera, ma con due dimensioni supplementari. Stando a questi modelli (assai semplificati) l'Universo sarebbe finito non solo nello spazio (il suo volume totale è finito) ma anche *nel tempo*. La singolarità iniziale, così problematica, verrebbe meno. Più esattamente, essa si trasforma in una semplice singolarità delle coordinate (come il polo nord di una sfera, per esempio) nello stesso modo di ciò che capita all'orizzonte di un buco nero. Non compare qui alcuna violazione delle leggi della fisica. L'Universo non ha più alcuna frontiera né spaziale, né temporale: niente inizio, niente fine. Questa nuova "eternità del tempo" viene però ritrovata solo al prezzo dell'abbandono del tempo cosmico reale (misurato dagli orologi o dall'espansione delle galassie) a vantaggio di un tempo immaginario (nel senso matematico della parola). Resta da indicare un'interpretazione soddisfacente di tutto ciò, ma non è affatto il caso in questa sede.

Linde, invece, assume delle condizioni iniziali caotiche. Dal punto di vista qualitativo, la soluzione (che è solo approssimativa) si presenterebbe sotto la forma di un solo Universo eterno e capace di riprodursi, che viene talvolta paragonato a una "*mousse* di miniuniversi". Ciascuna delle bolle di questa *mousse* avrebbe caratteristiche proprie: costanti fisiche, numero delle dimensioni spaziali, dinamica, ecc; il che consente di considerarla, con un certo abuso del linguaggio, come un "altro universo". La totalità del nostro *Universo visibile*, che va distinto dall'*Universo globale*, sarebbe costituita da una parte infima di una di queste bolle solamente, che sarebbe stata smisuratamente gonfiata da un processo ultra-efficace di espansione, noto come "inflazione". Ogni bolla individuale – in particolare

quella che costituisce il "nostro Universo" – può nascere e morire; ma l'Universo "globale" non ha né inizio né fine.

Ovviamente, un'idea del genere non sarà mai controllabile a livello osservativo. Ci si situa qui alle frontiere dell'approccio scientifico, forse già oltre. Come il lettore ha modo di constatare, la cosmologia quantistica solleva, a proposito dell'inizio dell'Universo, tanti problemi quanti ne risolve (se non di più). Ma è proprio questo che produce la sua ricchezza e il suo interesse. Chiediamoci ora se essa risolva il problema della singolarità. La risposta è ambigua: sì per certi modelli, no per altri. L'incertezza proviene, forse, dalla semplificazione esagerata cui bisogna necessariamente ricorrere per poter risolvere le equazioni nel minisuperspazio. Certi indizi ci fanno supporre che le singolarità potrebbero scomparire nel quadro della nuova visione unificata che i fisici si stanno sforzando di costruire. Comunque, è uno degli scopi più importanti della ricerca.

L'infinito nella letteratura

Nella lunga storia del pensiero occidentale, i tre enigmi dell'infinito – l'infinito del numero, l'infinito dello spazio, l'infinito del tempo – non hanno smesso di ispirare artisti, scrittori, poeti: Lucrezio, Pascal, Goethe, Novalis, Hugo, Blanqui, Aragon, Calvino, Sinisgalli, Koestler, Nabokov e molti altri hanno ciascuno sognato dell'infinità dei mondi, dell'eternità, del paradosso di Zenone, del tempo zero – per non dire delle innumerevoli metafore dell'infinito come, per esempio, la Torre di Babele e il labirinto. Nel suo *Cimitero marino* (1920) Paul Valéry esclama (vv. 121-126):

Zenone! Zenone d'Elea spietato!
Con quella freccia alata mi hai piagato
Chi vibra e vola pur senza volare!
Mi forma il suono e la freccia mi esanima!
Ombra di tartaruga sopra l'anima,
Ah! il sole... Achille immoto in tanto andare![9]

9. Utilizziamo qui la versione di Patrizia Valduga in P. Valéry, *Il cimitero marino*. Con un saggio di E. Franzini, Mondadori, Milano 1995, p. 21. [NdC]

È forse lo scrittore argentino Jorge Luis Borges (1899-1986) che ha espresso meglio di ogni altro l'ossessione dei rapporti tra finito e infinito. I vari problemi posti dall'infinito spaziale l'hanno condotto a rappresentarlo in maniera assai ingegnosa: corridoi che si biforcano e che non conducono da nessuna parte, tranne che a sale identiche alle prime e da cui si diramano dei corridoi omologhi; duplicazioni snervanti che chiudono il lettore in un labirinto che Borges identifica di buon grado con l'Universo (*La biblioteca di Babele*).[10] Nel caso che riguarda l'infinito temporale, Borges comprende che un'esperienza troppo breve ci fa supporre unico ciò che è infinitamente ripetuto. Noi siamo portati a considerare l'*Odissea* come un solo capolavoro e inimitabile; memore degli argomenti di Borel e delle scimmie dattilografe (§ 2.2), Borges, nel suo racconto *L'immortale*, ci fa capire che "dato un tempo infinito, con infinite circostanze e mutamenti, l'impossibile è non comporre, almeno una volta, l'*Odissea*".[11]

10. "L'Universo (che altri chiama Biblioteca) si compone di un numero indefinito, e forse infinito, di gallerie esagonali, con vasti pozzi di ventilazione nel mezzo, bordati di basse ringhiere" (J.L. Borges, "La biblioteca di Babele", in *Tutte le opere*, cit., vol. I, p. 680). [NdC]

11. J.L. Borges, "L'immortale", in *Tutte le opere*, cit., vol. I, p. 784. [NdC]

CONCLUSIONE

RIPENSARE L'INFINITO

> Per quanto sia in verità limitata la natura umana, essa porta in sé una grandissima porzione di infinito.
>
> GEORG CANTOR

Gli infiniti mascherati

Gli infiniti fanno paura ai fisici. Forse, per ragioni sperimentali perfettamente giustificate, come, per esempio, nel caso del corpo nero o in quello dell'instabilità del modello classico dell'atomo. Ma anche per ragioni metafisiche, più o meno confessate, come capita per il rifiuto dell'infinità del tempo e dello spazio. *A contrario*, altri presupposti metafisici talvolta si oppongono all'esclusione degli infiniti.

Prendiamo l'esempio della curvatura dello spazio. In cosmologia un pregiudizio tenace milita a favore di un "Universo piatto", cioè di un Universo in cui lo *spazio* sarebbe di curvatura nulla ("piatto"): sarebbe quello più "naturale", più "semplice", più "elegante"... Eppure, un tale spazio è definito da un raggio di curvatura infinito: favorire uno spazio senza curvatura equivale così a scegliere un valore infinito del raggio di curvatura!

Il ragionamento si applica ugualmente al caso della costante cosmologica λ. Alcuni preferirebbero sbarazzarsene, dandola uguale a zero, e facendo ricorso, per esempio, a una "energia del vuoto". Orbene, questa costante è interpretata abitualmente come l'inverso del quadrato di una lunghezza

fondamentale[1] L_λ. Considerare nulla la costante cosmologica ($\lambda = 0$), equivale di fatto a dare un valore infinito a L_λ. Ricordiamo, peraltro, che le osservazioni più recenti farebbero pensare a un valore diverso da zero per λ (0,7 unità cosmologiche).

La cosmologia non è l'unico settore in cui degli infiniti vengono mascherati. Ognuno sa, per esempio, che la velocità della luce *c* è numericamente finita. E tuttavia, ci vorrebbe un'energia infinita per condurre un corpo in movimento a tale velocità: il valore *c* finito nasconde così l'infinito fisico che esprime questa inaccessibilità. Analogamente, il valore finito dello zero assoluto della temperatura (lo zero della scala Kelvin uguale a –273,15 °C) nasconde un raffreddamento inaccessibile; basti considerare gli sforzi smisurati per raffreddare in laboratorio un piccolo campione di materia a qualche milionesimo di grado della scala Kelvin! Ci vorrebbero sforzi infiniti per raffreddare un corpo esattamente a zero gradi Kelvin.

Passiamo a un altro contesto: l'orizzonte di un buco nero è situato a una *distanza* perfettamente finita. Eppure, un fotone emesso da questo orizzonte ci mette un tempo infinito per raggiungerci; inoltre, ci arriverebbe con un'energia infinitamente ridotta! Allo stesso modo, un fotone che fosse stato emesso alla singolarità del Big Bang – da essa c'è una durata perfettamente finita (14 miliardi di anni) – avrebbe visto anch'esso la sua energia infinitamente ridotta. Tutti questi processi contemplano l'associazione di valori finiti e infiniti nella descrizione degli stessi fenomeni.

Nessun mistero, nessun paradosso, dunque, nella manipolazione delle grandezze infinite da parte della fisica. Basta non farsi ingannare, e sapere bene di che cosa si parla: si tratta di utilizzare la grandezza giusta, quella che si può misurare, e il cui carattere finito o infinito assume un significato preciso.

1. La quale, del resto, è anch'essa un raggio di curvatura. Vedi M. Lachièze-Rey, *Les avatars du vide*, cit.

Cosmologia: l'infinito accettato

L'infinito è lungo, soprattutto verso la fine.
PIERRE DAC

Non c'è motivo di concludere che la fisica nel suo complesso debba sbarazzarsi dell'infinito. Al contrario, l'infinito serve al fisico. Newton diceva, per esempio, "le stelle non cadono, poiché in un Universo infinito non c'è un punto centrale dove cadere". Anzi, la cosmologia costituisce il dominio privilegiato degli infiniti: gli infinitamente grandi dello spazio e del tempo, passato e futuro; infiniti, grandi o piccoli, legati alla singolarità iniziale. E questa disciplina ha cominciato a progredire proprio da quando ha accettato l'infinito. Uno storico del pensiero scientifico come Alexandre Koyré collega l'inizio della cosmologia moderna all'abbandono del Mondo chiuso per un Universo spazialmente infinito. Potrebbe sembrare paradossale, se si pensa che il modo di procedere tipico del fisico consiste spessissimo nell'eliminare gli infiniti. Così, la cosmologia contemporanea diventa essa stessa una "singolarità" e costituisce probabilmente la sola branca della fisica in cui la problematica finito/infinito si pone con una certa tranquillità, senza paradosso o contraddizione: finito e infinito paiono qui egualmente ammissibili.

Questa notevolissima condizione ci indica, verosimilmente, come i modelli del Big Bang rappresentino un archetipo di come procede la scienza. È proprio vero che, dopo aver fronteggiato tante critiche (spesso capziose), coloro che li difendevano sono stati costretti a perfezionare al massimo statuto epistemologico e conformità agli standard del rigore scientifico. Tali modelli, dunque, sono stati in grado di ottenere uno statuto piuttosto solido, che supera di parecchio, per esempio, quello della fisica dei quanti. La sorpresa maggiore è venuta dall'estrema precisione osservativa, totalmente impensabile solo qualche decennio fa, con la quale si è potuto confermarli.

Bisogna davvero sopprimere l'infinito?

A parte il Cosmo stesso, ogni sistema fisico è limitato, contiene solo un numero finito di particelle, una quantità finita di informazioni. Così, l'infinito non esprime mai il risultato di una misurazione fisica possibile (a parte, ovviamente, il caso di certi contatori che, per ragioni puramente di comodo, sono graduati fino all'infinito, come i telemetri delle macchine fotografiche). Ma ciò deve inesorabilmente comportare che l'infinito venga bandito dalla descrizione del sistema? Chiediamo allora se valori numerici (infiniti) non accertabili siano, perciò stesso, dei valori così inaccettabili. Numeri irrazionali come π e $\sqrt{2}$, dopotutto, non sono maggiormente accessibili alle misure! Eppure, la nostra descrizione della natura fa libero uso di tali valori non misurabili – e ciò mostra la differenza di fondo tra teoria e realtà empirica. Insomma, non sembra molto opportuno respingere l'infinito con la motivazione sopra riportata.

Ciò malgrado, il carattere finito della realtà impedisce spesso non al matematico, bensì al fisico di guardare all'infinito con occhio sereno. Ancora vincolato ai precetti di Aristotele, il fisico considera l'infinito, il più delle volte, come uno strumento abbastanza lecito del suo arsenale di concetti, ma guai a spingersi oltre! Se mai si dà un infinito reale, se non è del tutto respinto, è almeno mascherato dietro un *orizzonte*. Questo nuovo atteggiamento della fisica contemporanea è l'espressione dell'inaccessibilità a un infinito macroscopico o microscopico. Un orizzonte *relativistico*, della cosmologia o di un buco nero, proviene dall'impossibilità di superare la velocità della luce; un "orizzonte quantistico" deriva dal principio di indeterminazione[2] che esclude lo zero come risultato per l'incertezza di una misura fisica.

Così, la comparsa dell'infinito in una teoria fisica indicherebbe il limite di validità della teoria stessa, o, ancor peggio, una sorta di patologia che sarebbe opportuno sanare appena

2. Vedi nota 11, Capitolo 3. [NdC]

diagnosticata. Jules-Henri Poincaré, fisico e matematico, considerava così una "patologia" l'opera di Georg Cantor, che pure era stata capace di dare un significato all'infinito matematico.

Esigenza intima e profonda della conoscenza umana, l'infinito non è prerogativa esclusiva dei matematici o dei fisici. La filosofia, la teologia, l'arte e l'etica hanno affrontato anch'esse la questione. Il rifiuto dell'infinito da parte dei fisici, allora, non può essere interamente considerato come un fenomeno del tutto razionale. Proviene quindi dal mondo delle passioni, dal regno dell'inconscio? È forse il frutto di una pulsione di morte? L'incapacità di pensare l'infinito non potrebbe essere una conseguenza dell'"orrore" che evoca? La vita, così difficile da vivere, non ha forse una fine? Tale ci pare il senso dell'osservazione di Jacques Lacan: "Possiamo vivere solo perché tutto questo deve avere un termine". Se questa frattura radicale da cui sgorga la nostra finitezza ha davvero un ruolo nella costituzione e nella strutturazione del nostro psichismo, ciò spiega forse alcuni violenti rifiuti dell'infinito: la vera e propria creazione di un tabù che si oppone al notevole fascino di un ipotetico al di là capace di promessa infinita.

Allora, bisogna eliminare gli infiniti di vario tipo che compaiono nei nostri tentativi di descrivere la natura, come quelli di cui abbiamo trattato in *questo volume*? Ma come farlo? Si è visto che le risposte possono essere molto diverse, talvolta contraddittorie.

Gli infiniti delle singolarità gravitazionali, tanto dei buchi neri quanto dei Big Bang, ci conducono ai limiti della fisica. Che si cerchi di eliminarli, piuttosto che di circoscriverli (mediante orizzonti), i passi corrispondenti aprono nuove piste di ricerca: gravità e cosmologia quantistica, superstringhe, ecc.

Dunque, lungi dall'essere stati liquidati, gli infiniti dello spazio e del tempo, che hanno tormentato tutti i grandi pensatori della storia, hanno acquisito statuti privilegiati – grazie alla relatività generale e agli sviluppi della topologia.

Quanto agli infiniti della materia, è un imperativo per la fisica delle particelle eliminarli se vuole diventare operativa. Ma la procedura cui oggi ricorre, la rinormalizzazione, è forse an-

cor meno accettabile degli infiniti stessi: sbarazzarsi del valore infinito di una grandezza non elimina, perciò stesso, tutti i problemi che si imputavano a tale valore. È un po' come se si pretendesse di risolvere un problema rifiutando semplicemente di pensarci.

Comunque sia, da un ramo all'altro della fisica, l'aver evocato l'infinito può rivelarsi fecondo in più di un modo, e ricorrervi spesso è indispensabile. Per esempio, il "passaggio al limite" rappresenta un procedimento essenziale dei metodi di ragionamento in fisica. Ma i tentativi di sbarazzarsi degli infiniti – siano riusciti o meno – possono rivelarsi anch'essi fruttuosi, in quanto producono nuove teorie scientifiche.

Ma spesso la nuova teoria che scaturisce dall'eliminazione di un infinito a sua volta fa emergere singolarità (in relatività) o divergenze (in fisica quantistica) ... Sono nuove patologie che la quasi totalità dei fisici si sforza di debellare. Quali nuovi infiniti compariranno allora? Bisogna dunque consigliare al fisico di dissimulare la volontà di sbarazzarsi degli infiniti, ma senza caderne ostaggio.

Tutto sommato, il bilancio pare nettamente positivo: dobbiamo apprezzare la presenza di infiniti, esserne soddisfatti. Tali infiniti non impediscono mai alle teorie di funzionare; al contrario, ne rivelano i punti nevralgici, indicano i progressi che bisogna ulteriormente compiere e mostrano persino che via seguire. Ogni infinito che viene eliminato conduce a una teoria più completa che genera, a sua volta, un nuovo infinito. Come una Sfinge o una Fenice, l'infinito rinasce senza posa dalle sue ceneri. Infine, il motto della fisica potrebbe essere questo: "L'infinito è morto, viva l'infinito".

BIBLIOGRAFIA

Testi classici

ARCHIMEDE, *Opere*. Ed. it. a cura di A. Frajese, UTET, Torino 1974.

ARISTOTELE, *Fisica, Del cielo*. Tr. it. di A. Russo e di O. Longo, Laterza, Roma-Bari 2005.

BOLZANO, B., *I paradossi dell'infinito*. Ed. it. a cura di A. Conte, Bollati Boringhieri, Torino 2003.

BROUWER, L.E.J., *Collected Works*. A cura di A. Heyting, 2 voll., North-Holland, Amsterdam 1975.

BRUNO, G., *Opere italiane*. Testi critici di G. Aquilecchia, coordinamento generale di N. Ordine, 2 voll., UTET, Torino 2002.

CANTOR, G., *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*. Hrg. E. Zermelo, Olms Verlag, Hildesheim 1966.

CANTOR, G., *La formazione della teoria degli insiemi: saggi del 1872-1883*. Note di E. Zermelo, ed. it. a cura di G. Rigamonti, Sansoni, Firenze 2002.

COPERNICO, N., *Opere*. Ed. it. a cura di F. Barone, UTET, Torino 1979.

CUSANO, N., *La dotta ignoranza*. Tr. it. con introduzione e note di G. Federici Vescovini, Fabbri, Milano 2000.

DESCARTES, R., *Opere scientifiche*. Ed. it. a cura di E. Lojacono, 2 voll., UTET, Torino 1983.

DIELS, H., KRANZ, W., *I Presocratici. Testimonianze e frammenti*. Ed. it. con introduzione di G. Giannantoni, 2 voll., Laterza, Roma-Bari 1981.

EPICURO, *Opere*. Ed. it. a cura di M. Isnardi Parente, UTET, Torino 1974.

EUCLIDE, *Gli elementi di Euclide*. Ed. it. a cura di L. Frajese e L. Maccioni, UTET, Torino 1970.

FONTENELLE, B. LE BOVIER DE, *Eléments de la géométrie de l'infini*. In *Ouvres complètes*, VIII, Fayard, Paris 2000.

GALILEO, G., *Opere di Galileo Galilei*. Ediz. naz. a cura di A. Favaro, Giunti-Barbera, 20 voll., Firenze 1890-1909 (rist. 1968).

GALILEO, G., *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo tolemaico e copernicano*. A cura di L. Sosio, Einaudi, Torino 1970.

GEYMONAT, M., *Il grande Archimede*. Prefazione di L. Canfora, Sandro Teti Editore, Roma 2006.

JAMES, W., *Introduzione alla filosofia*. Tr. it. di M. Malatesta, Bocca, Milano 1945.

KANT, I., *Critica della ragion pura*. Ed. it. a cura di P. Chiodi, UTET, Torino 2005.

KANT, I., *Storia universale della natura e teoria del cielo*. Tr. it. e introduzione a cura di A. Cozzi, O. Barjes, Roma 1956.

KEPLER, J., *Gesammelte Werke*. Herausgegeben von. M. Caspar, XX voll. C.H. Beck'sche Verlagsbuchhandlung, München MCMXXXVIII.

KEPLER, J., *Dissertatio cum Nuncio Sidereo*. Ed. it. con commento e cura di G. Tabarroni, note introduttive di G. Horn-D'Arturo e E. Pasoli, Tipografia Compositori, Bologna 1965.

LUCREZIO, *De rerum natura*. Ed. it. a cura di A. Schiesaro, tr. it. di R. Raccanelli, note di C. Santini, Einaudi, Torino 2003.

MILL, J.S., *Sistema di logica deduttiva e induttiva*. Ed. it. a cura di M. Trinchero, tr. it. di F. Restaino, 2 voll., UTET, Torino 1988.

NEWTON, I., *Principi matematici della filosofia naturale*. Ed. it. a cura di A. Pala, UTET, Torino 1965.

OLBERS, H., *La transparence de l'espace cosmique*. Tr. fr. di J. Merleau-Ponty, in *La Science de l'Univers à l'âge du positivisme*. Vrin, Paris 1983.

PASCAL, B., *Pensieri e altri scritti*. Ed. it. a cura di G. Auletta, Mondadori, Milano 1994.

PINDARO, *Le odi*. Ed. it. di E. Romagnoli, 2 voll., Zanichelli, Bologna 1927.

POE, E.A., *Eureka. Saggio sull'universo spirituale e materiale*. Ed. it. a cura di G. Giorello e M. Skey, tr. it. A. Quadrino, Edizioni Theoria, Roma 1982.

POINCARÉ, J.-H., *La scienza e l'ipotesi*. Ed. it. con testo a fronte a cura di C. Sinigaglia, Bompiani, Milano 2003.

RIEMANN, B., *Sulle ipotesi che stanno alla base della geometria e altri scritti scientifici e filosofici*. Ed. it. a cura di R. Pettoello, Bollati Boringhieri, Torino 1994.

Infinito e pluralità dei mondi

AA.VV., *L'infini dans le sciences, l'art et la philosophie*. Edition L'Harmattan, Paris 2003.
BLAY, M., *Les raisons de l'infini*. Gallimard, Paris 1993.
COHN, J., SEIDENGART, J., *Historie de l'infini: Le problème de l'infini dans la pensée occidentale jusqu'à Kant*. Editions du Cerf, Paris 1988.
DAUBEN, J.W., *Georg Cantor. His Mathematics and Philosophy of Infinite*. Harvard University Press, Cambridge (Mass.) 1979.
DICK, S.J., *Plurality of Worlds. The Origins of Extraterrestrial Debate from Democritus to Kant*. Cambridge University Press, Cambridge 1982.
DICK, S.J., *La vita nel Cosmo*. Tr. it. Raffaello Cortina, Milano 2002.
KOYRÉ, A., *Dal mondo chiuso all'universo infinito*. Tr. it. Feltrinelli, Milano 1970.
KOYRÉ, A., *Studi newtoniani*. Tr. it. Einaudi, Torino 1972.
LACHIÈZE-REY, M., LUMINET, J.-P., *Figures du ciel*. Seuil/BNF, Paris 1998.
LÉVINAS, E., *Totalità e infinito. Saggio sull'interiorità*. Tr. it. Jaca Book, Milano 2004.
LÉVY, T., *Figures de l'infini*. Le Seuil, Paris 1987.
MONNOYEUR, F., (a cura di), *Infini des mathématiciens, infini des philosophes*. Belin, Paris 1992.
MONNOYEUR, F., (a cura di), *Infini des philosophes, infini des astronomes*. Belin, Paris 1999.

Relatività e cosmologia

EDDINGTON, A.S., *Spazio, tempo e gravitazione*. Tr. it. Boringhieri, Torino 1971.
EDDINGTON, A.S., *L'universo in espansione*. Tr. it. Zanichelli, Bologna 1989.
EINSTEIN, A., *Idee e opinioni*. Tr. it. di F. Fortini con la consulenza scientifica di C. Losurdo, Schwarz Editore, Milano 1957.
EINSTEIN, A., *Opere scelte*. Ed. it. a cura di E. Bellone, Bollati Boringhieri, Torino 2004.
FRIDMAN, A., LEMAÎTRE, G., *Essais de cosmologie*. A cura di A. Grib, J.-P. Luminet, Le Seuil, Paris 1997.
GALISON, P., *Gli orologi di Einstein e le mappe di Poincaré*. Tr. it. Raffaello Cortina, Milano 2005.
GREENE, B., *L'Universo elegante*. Tr. it. Einaudi, Torino 2000.

GRIBBIN, J., *Enciclopedia dell'astronomia e della cosmologia*. Ed. it. a cura di L. Sosio, Garzanti, Milano 2005.
HACK, M., *Sette variazioni sul cielo*. Raffaello Cortina, Milano 1999.
HARRISON E.R., *Darkness at Night*. Harvard University Press, Cambridge (Mass.) 1987.
HARRISON, E.R., *Cosmology. The Science of the Universe*. Cambridge University Press, Cambridge (Mass.) 2000.
HUBBLE, E., *The Realm of the Nebulae*. Yale University Press, New Haven 1936.
LACHIÈZE-REY, M., *Initiation à la cosmologie*. 4e ed., Dunod, Paris 2004.
LACHIÈZE-REY, M., *Les avatars du vide*. Le Pommier, Paris 2005.
LEHOUCQ, R., *L'Univers a-t-il une forme?*. Flammarion, Paris 2004.
LEVIN, J., *Come all'universo sono venute le macchie*. Tr. it. il Saggiatore, Milano 2003.
LUMINET, J.-P., *I buchi neri*. Tr. it. Nardi, Firenze 1992.
LUMINET, J.-P., *La segreta geometria del cosmo*. Tr. it. Raffaello Cortina, Milano 2004.
LUMINET, J.-P., *L'invenzione del Big Bang*. Tr. it. Dedalo, Bari 2006.
PAIS, A., *Sottile è il Signore: la scienza e la vita di Albert Einstein*. Tr. it. Bollati Boringhieri, Torino 1986.
PATY, M., *Einstein philosophe*. PUF, Paris 1993.
REES, M., *Prima dell'inizio*. Tr. it. Raffaello Cortina, Milano 1998.
REGGE, T., "Relatività", in *Enciclopedia*, vol. XI, Einaudi, Torino 1980, pp. 820-889.
REGGE, T., *Cronache dell'universo*. Boringhieri, Torino 1981.
REGGE, T., *Infinito*. Mondadori, Milano 1995.
SCHLICK, M., *Spazio e tempo nella fisica contemporanea. Una introduzione alla teoria della relatività e della gravitazione*. Prefazione di L. Geymonat, tr. it. Bibliopolis, Napoli 1983.
SCHWINGER, J., *L'eredità di Einstein: l'unità di spazio e tempo*. Tr. it. Zanichelli, Bologna 1988.
SPARZANI, A., *Relatività, quante storie*. Bollati Boringhieri, Torino 2003.

Matematica e logica

AA.VV., *Les infinis, Pour la Science*, dossier spécial, dicembre 2000.
ABIAN, A., *La teoria degli insiemi e l'aritmetica transfinita*. Tr. it. Feltrinelli, Milano 1972.
AGAZZI, E., PALLADINO, D., *Le geometrie non euclidee*. Mondadori, Milano 1978.

BARROW, J., *Da zero a infinito. La grande storia del nulla*. Tr. it. Mondadori, Milano 2002.

BONOLA, R., *La geometria non euclidea. Esposizione storico-critica del suo sviluppo*. Zanichelli, Bologna 1906. Ristampa anastatica, 1975.

BOTTAZZINI, U., *Il flauto di Hilbert*. UTET, Torino 1981.

BOURBAKI, N., *Elementi di storia della matematica*. Tr. it. Feltrinelli, Milano 1963.

BOYER, C.B., *Storia della matematica*. Tr. it. Mondadori, Milano 1990.

BOZZI, S., MANGIONE, C., *Storia della logica. Da Boole ai giorni nostri*. Garzanti, Milano 1993.

CASARI, E., *Questioni di filosofia della matematica*. Feltrinelli, Milano 1964.

CELLUCCI, C. (a cura di), *Filosofia e matematica*. Laterza, Roma-Bari 2003.

COHEN, P.J., *La teoria degli insiemi e l'ipotesi del continuo*. Tr. it. Feltrinelli, Milano 1973.

COURANT, R., ROBBINS, H., *Che cos'è la matematica?*. Tr. it. Bollati Boringhieri, Torino 1971.

DAVIS, P.J., HERSCH, R., *L'esperienza matematica*. Tr. it. Edizioni Comunità, Milano 1985.

DEDEKIND, J.W.R., *Scritti sui fondamenti della matematica*. Ed. it. a cura di F. Gana, Bibliopolis, Napoli 1982.

DE FINETTI, B., *Matematica logico-intuitiva*. Edizione Scientifica Triestina, Trieste 1944. Ristampa anastatica Giuffrè, Milano 2005.

DELAHAYE, J.-P., *Les inattendus mathématiques*. Pour la Science, Belin, Paris 2004.

DIEUDONNÉ, J., *L'arte dei numeri. Matematica e matematici oggi*. Tr. it. Mondadori, Milano 1999.

FRAENKEL, A.A., *Abstract Set Theory*. North-Holland, Amsterdam 1961.

FRAENKEL, A.A., BAR-HILLEL, Y., *Foundations of Set Theory*. North-Holland, Amsterdam 1958.

GEYMONAT, L., *Storia e filosofia dell'analisi infinitesimale*. Levrotto & Bella, Torino 1947.

GIUSTI, E., *Ipotesi sulla natura degli oggetti matematici*. Bollati Boringhieri, Torino 1999.

GÖDEL, K., *Collected Works*. Edited by S. Feferman, J.W. Dawson jr., (Editors in chief) W. Goldfarb, C. Parson, W. Sieg, 5 voll., Clarendon Press, Oxford 1986-2003.

HILBERT, D., *Ricerche sui fondamenti della matematica*. Ed. it. a cura di M. Abrusci, Bibliopolis, Napoli 1978.

KLINE, M., *La matematica nella cultura occidentale*. Tr. it. Feltrinelli, Milano 1976.

KLINE, M., *Storia del pensiero matematico*. Ed. it. a cura di A. Conte, 2 voll., Einaudi, Torino 1996.
MANDELBROT, B.B., *Gli oggetti frattali. Forma, caso e dimensione*. Tr. it. a cura di R. Pignom, Einaudi, Torino 1987.
MESCHKOWSKI, H., *Mutamenti del pensiero matematico*. Tr. it. Boringhieri, Torino 1973.
ROZSA, P., *Giocando con l'infinito*. Tr. it. Feltrinelli, Milano 1973.
RUSSELL, B., *I principi della matematica*. Tr. it. Longanesi, Milano 1963.
RUSSELL, B., *Introduzione alla filosofia matematica*. Tr. it. Longanesi, Milano 1947.
STRUIK, D.J., *Matematica: un profilo storico*. Tr. it. il Mulino, Bologna 1981.
TRUDEAU, R., *La rivoluzione non euclidea*. Tr. it. Bollati Boringhieri, Torino 1991.
WAISMANN, F., *Introduzione al pensiero matematico*. Tr. it. Boringhieri, Torino 1965.
WEYL, H., *Filosofia della matematica e delle scienze naturali*. Tr. it. Boringhieri, Torino 1967.
WEYL, H., *Il mondo aperto*. Tr. it. Boringhieri, Torino 1981.
ZELLINI, P., *Breve storia dell'infinito*. Adelphi, Milano 1980.

Fisica dei quanti e nuove teorie

BARROW, J., *Dall'io al cosmo*. Tr. it. Raffaello Cortina, Milano 2000.
BARROW, J., *Teorie del tutto: la ricerca della spiegazione ultima*. Tr. it. Adelphi, Milano 1996.
BOHR, N., *I quanti e la vita*. Tr. it. Boringhieri, Torino 1965.
BOHR, N., *Teoria dell'atomo e conoscenza umana*. Tr. it. Boringhieri, Torino 1961.
COHEN-TANNOUDJI, G., SPIRO, M., *La matière espace-temps*. Fayard, Paris 1986.
DAVIES, P., *Superforza: verso una teoria unificata dell'universo*. Tr. it. Mondadori, Milano 1986.
GHILARDI, G., *Un'occhiata alle carte di Dio*. il Saggiatore, Milano 1997.
HAWKING, S., *Dal Big Bang ai buchi neri*. Tr. it. Rizzoli, Milano 1988.
HAWKING, S., *Buchi neri e universi neonati. E altri saggi*. Tr. it. Rizzoli, Milano 1993.
HAWKING, S., PENROSE, R., *La natura dello spazio e del tempo*. Tr. it. Sansoni, Milano 1996.

HEISENBERG, W., *Mutamenti nelle basi della scienza*. Tr. it. Boringhieri, Torino 1960.
KLEIN, E., *Petit voyage dans le monde quantique*. Flammarion, Paris 2004.
KUHN, T.S., *Alle origini della fisica contemporanea. La teoria del corpo nero e la discontinuità quantistica*. Tr. it. il Mulino, Bologna 1981.
LACHIÈZE-REY, M., *Au-delà de l'espace et du temps*. Le Pommier, Paris 2003.
LÉVY-LEBLOND, J.-M., BALIBAR, F., *Quantique, rudiments*. InterEditions, Paris 1984.
LINDE, A., *Particle Physics and Inflationary Cosmology*. Gordon and Beach, New York 1989.
LINDE, A., *Inflation and Quantum Cosmology*. Academic Press, San Diego and London 1990.
PAIS, A., *Il danese tranquillo. Niels Bohr, un fisico e il suo tempo 1885-1962*. Tr. it. Bollati Boringhieri, Torino 1993.
PENROSE, R., *La mente nuova dell'imperatore*. Tr. it. Rizzoli, Milano 1992.
PENROSE, R., *Ombre della mente*. Tr. it. Rizzoli, Milano 1996.
PENROSE, R., *Il grande, il piccolo e la mente umana*. Seconda Edizione. Tr. it. Raffaello Cortina, Milano 2000.
PENROSE, R., *La strada che porta alla realtà*. Tr. it. Rizzoli, Milano 2005.
PLANCK, M., *La conoscenza del mondo fisico*. Tr. it. Einaudi, Torino 1942.
ROVELLI, C., *Quantum Gravity*. Cambridge University Press, Cambridge 2004.

Letteratura e infinito

BLANQUI, L.-A., *L'eternità attraverso gli astri*. Ed. it. a cura di F. Desideri, traduzione di D. Pozzi, Edizioni Theoria, Roma 1983.
BORGES, J.L., *Tutte le opere*. Ed. it. a cura di D. Porzio, 2 voll., Mondadori, Milano 1984.
BRAFFORT, P., *Science et littérature*. Diderot, Paris 1998.
CALVINO, I., *Ti con zero*. Einaudi, Torino 1967.
LUMINET, J.-P., *Les poètes et l'Univers*. Le Cherche-Midi, Paris 1996.
SINISGALLI, L., *Horror vacui*. A cura di e con un saggio di R. Aymone, Avagliano Editore, Cava dei Tirreni 1995.
VALÉRY, P., *Quaderni*. A cura di J. Robinson-Valéry, tr. it. di R. Guarini, 4 voll., Adelphi, Milano 1985-1990.

INDICE ANALITICO